MT

Formelsammlung

HTA

Rainer Meier
Käserei
6288 Schongau
skybeam@skybeam.ch

Klasse: Ia-bb
2002-2006

1. Inhaltsverzeichnis

2. Aussagen und Math. Beweise

2.1. Definition

Aussagen sind Sprachkonstrukte die entweder wahr oder falsch sind.

Beispiel

- Bern ist die Hauptstadt der Schweiz ✓
- 1+1=2 ✓

d.h. viele umgangssprachliche Formulierungen sind <u>keine</u> Aussage.

Bezeichnung

$1+1=2 \equiv p$

p ist der Name der Aussage „1+1=2“.
Bekannte Aussagen können zu komplexen Aussagen verbunden werden:

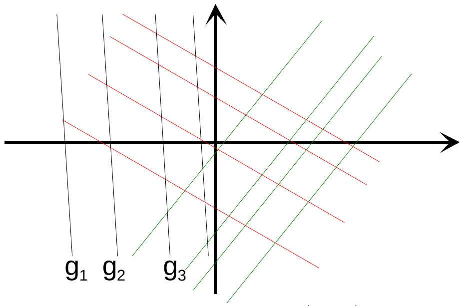
- Negation: $\neg$
- Konjunktion: $\wedge$
- Disjunktion: $\vee$
- Exklusion: $\oplus$
- Implikation: $\rightarrow$

2.2. [Kapitel vervollständigen!]

3. Äquivalenzrelation

- reflexiv
- transitiv
- symmetrisch

A = Menge alle Geraden in der Ebene
$R = \{(g_1, g_2) \in A \times A \mid g_1 \text{ parallel zu } g_2\}$



- reflexiv: $\forall x \in A : (x, x) \in R$
  d.h. jede Gerade ist parallel zu sich selbst.
- Transitiv: $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$
  d.h. g_1 parallel zu g_2 und g_2 parallel zu g_3 → g_1 parallel zu g_3
- symmetrisch: $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$
  d.h. g_1 zu parallel zu g_2 → g_2 parallel zu g_1

3.1. Äquivalenzklassen

[g_1] = Menge aller zu g_1 parallelen Geraden
$[g_1] = \{g \in A / (g_1, g) \in R\}$

Definition

Eine Relation auf A heisst PARTIELLE ORDNUNG, falls sie reflexiv, transitiv / antisymmetrisch ist.

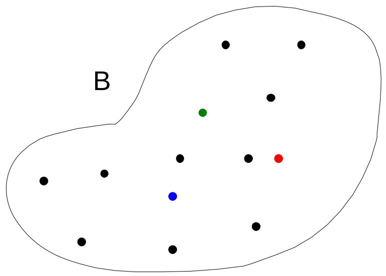
Beispiel

- Ordnungsrelation: $R_{\leq}$
- Teilerrelation: $R_{,}$

Mengenverband

B = Menge der Äquivalenzklassen

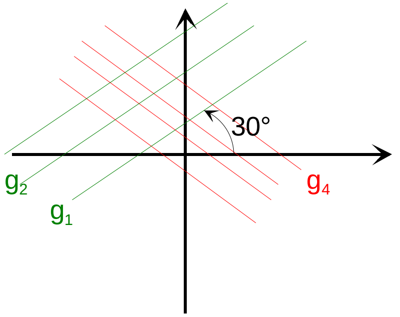
B = { [g_1], [g_4], [g_5], ... }



Jeder Punkt ist eine Äquivalenzklasse

<= Winkel

$$R = \{([g],[h]) \in B \times B \,/ < [g] \leq < [h]\}$$



$$([g_1],[g_4]) \in R$$

$$< [g_1] = 30°$$

- Reflexiv: $< [g_1] \leq < [g]$
- Transitiv: $< [g_1] \leq < [g_2]$

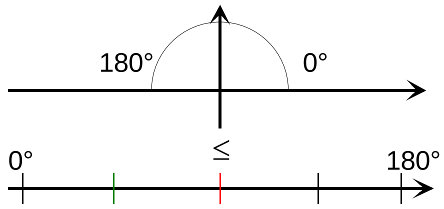
  und $< [g_2] \leq < [g_3]$

  ➔ $< [g_1] \leq < [g_3]$
- Antisymmetrisch: $< [g] \leq < [h]$

  und $< [h] \leq < [g]$

  $< [g] = < [h]$

PARTIELLE ORDNUNGEN „sortieren“ die Menge!



4. Differenzierbare Funktionen

4.1. Definition

Eine Funktion $f : D \to R$ heisst differenzierbar im Punkt $a \in D$ falls für jede Folge $(x_n)_n \subset D$ mit $x_n \xrightarrow{n} a$ gilt:

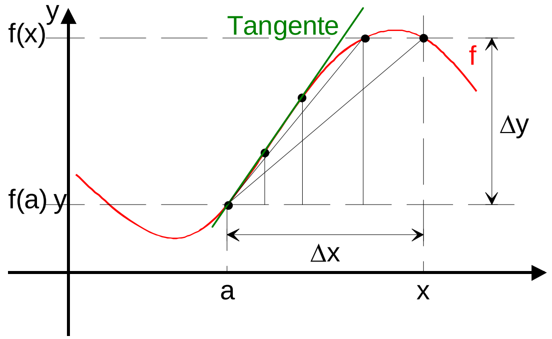
$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \xrightarrow{n} f'(a)$$

4.2. Ziel

Wichtige **charakteristisch** Punkte einer Funktion **rechnerisch** bestimmen können.

Differential (Ableitung)

Steigungsverhalten der Funktion mathematisch beschreiben können.



4.3. Beobachtung

Die mittlere Steigung nähert sich der Tangente an
Gesucht ist die Steigung der Tangente im Punkt (a,y):
Mittlere Steigung m gegeben durch

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

4.4. Vorhersagebreite reduzieren

Mathematisch: Betrachte eine Folge von Punkten $(x_n)_n$ mit $x_n \xrightarrow{n} a$

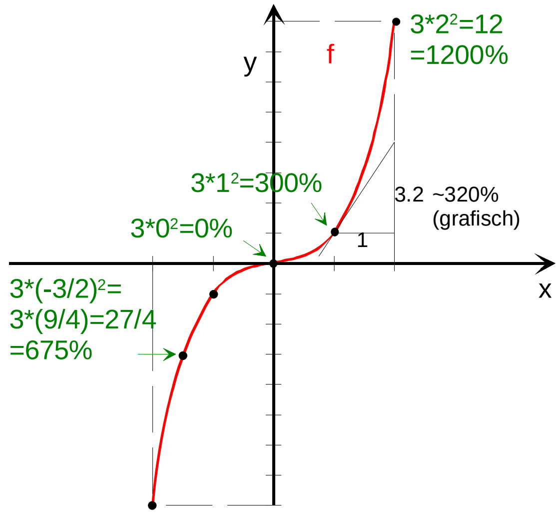
Beobachtung mathematisch

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \xrightarrow{n} f'(a)$$

(Steigung von f im Punkt a)

4.5. Beispiel Exponentialfunktion

$$\boxed{f(x) = x^3}$$



Berechnung der Steigung im Punkt a

Betrachte dazu eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \xrightarrow{n} a$

Zu berechnen ist der Grenzwert von

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \frac{x_n{}^3 - a^3}{x_n - a}$$

setze $x_n - a =: d_n \xrightarrow{n} 0$

➔ $x_n = a + d_n$

d.h.

$$\frac{(a + d_n)^3 - a^3}{d_n} = \frac{(a^3 + 3a^2 d_n + 3ad_n{}^2 + d_n{}^3) - a^3}{d_n}$$

$$= \frac{d_n(3a^2 + 3ad_n + d_n{}^2)}{d_n} = 3a^2 + 3ad_n + d_n{}^2 = 3a^2$$

$$3a^2 \xrightarrow{n} 3a^2$$

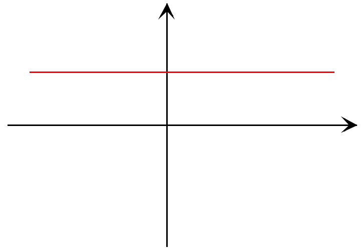
$$3ad_n \xrightarrow{n} 3a \cdot 0 = 0$$

$$d_n{}^2 \xrightarrow{n} 0$$

➔ $\boxed{f'(a) = 3a^2}$

4.6. Beispiel Konstante

$\boxed{f(x)=3}$ ist differenzierbar in $R=D$ mit $\boxed{f'(a)=0}$ für alle $a \in R$



Berechnung der Steigung im Punkt n:

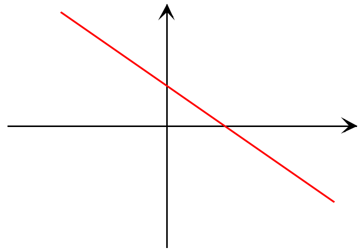
Betrachte dazu eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \xrightarrow{n} a$

Zu berechnen ist der Grenzwert von

$$\boxed{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=\frac{3-3}{x_n-a}=0\xrightarrow{n}0}$$

4.7. Beispiel Gerade

$f(x)=-2x+5$ ist differenzierbar in $R=D$



Berechnung der Steigung im Punkt a:

Betrachte dazu eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \xrightarrow{n} a$

Zu berechnen ist der Grenzwert von

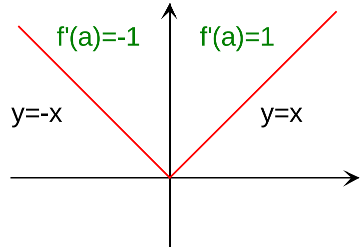
$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=\frac{-2x_n+5-(-2a+5)}{x_n-a}=\\&\frac{-2x_n+2a}{x_n-a}=\frac{-2(x_n-a)}{x_n-a}=-2\xrightarrow{n}-2\end{aligned}}$$

Bemerkung:

Bei einer Geraden $f(x)=mx+b$ wird die Ableitung gegeben durch die Steigung der Geraden, d.h. $f'(x)=m$

4.8. Beispiel |x|

$f(x)=|x|$ differenzierbar in R\{0}



NICHT differenzierbar in a=0!

Komplexes Beispiel

4.9. Zusammenfassung

f	f'
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
…	…
x^n	nx^{n-1} $n \in N$ $n \in R$

4.10. Rechenregeln

4.10.1. Summenregel

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$\left(x^2 + x^5\right)' = \left(x^2\right)' + \left(x^5\right)' = 2x + 5x^4$$

4.10.2. Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(x^2 \cdot x^5\right)' = 2x \cdot x^5 + x^2 \cdot 5x^4 =$$

$$2x^6 + 5x^6 = 7x^6 = \left(x^7\right)'$$

4.10.3. Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

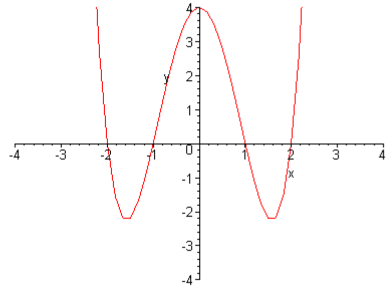
$$\left(\frac{x^2}{x^5}\right)' = \frac{2x \cdot x^5 - x^2 \cdot 5x^4}{\left(x^5\right)^2} =$$

$$\frac{2x^6 - 5x^6}{x^{10}} = \frac{-3x^6}{x^{10}} = \frac{-3}{x^4}$$

4.11. Aufgabe

Bestimme die Schnittwinkel der Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ mit den Koordinatenachsen!

4.11.1. Grafik



4.11.2. Ableitung

$$f'(x) = 4x^3 - 10x$$

4.11.3. Nullstellen (Schnitt mit x-Achse)

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

setze $a = x^2$:

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$(a-1)(a-4) = 0$$

$a = 4$ oder $a = 1$

$x = \pm 2$ oder $x = \pm 1$

4.11.4. Schnitt mit y-Achse

$$y = f(0) = 0 - 5 \cdot 0 + 4 = 4$$

4.11.5. Winkelberechnung

Ableitungen in den spezifischen Punkten berechnen:

$$f'(-2) = 4\cdot(-2)^3 - 10\cdot(-2) = -32 + 20 = -12$$

$$f'(-1) = 4\cdot(-1)^3 - 10\cdot(-1) = -4 + 10 = 6$$

$$f'(0) = 4\cdot 0 - 10\cdot 0 = 0$$

$$f'(1) = 4\cdot 1^3 - 10\cdot 1 = 4 - 10 = -6$$

$$f'(2) = 4\cdot 2^3 - 10\cdot 2 = 32 - 20 = 12$$

Winkel berechnen:

$$\alpha_1 = \arctan\left(f'(-2)\right) = -85.24$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(f'(-1)\right) = 80.54$$

$$\alpha_3 = \arctan\left(f'(0)\right) = 0$$

$$\alpha_4 = \arctan\left(f'(1)\right) = -80.54$$

$$\alpha_5 = \arctan\left(f'(2)\right) = 85.24$$

4.12. Kettenregel

$$.\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

4.12.1. Beispiel 1

$$\left((x+3)^5\right)'$$

➔ $$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 \\ g(x) = x+3 \Rightarrow g'(x+3) = 1 \end{array}}$$

➔ $$\boxed{\left((x+3)^5\right)' = 5(x+3)^4\cdot 1 = 5(x+3)^4}$$

4.12.2. Beispiel 2

$$\left(\sqrt{(x^2+5x)}\right)'$$

➔ $$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ g(x) = x^2+5x \Rightarrow g'(x) = 2x+5 \end{array}}$$

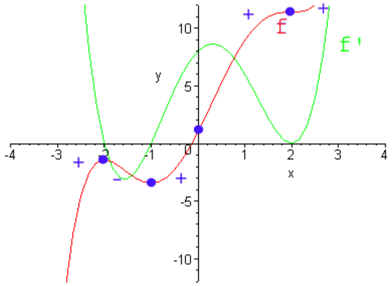
➔ $$\left(\sqrt{(x^2+5x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x+5}}\cdot 2x+5 = \frac{2x+5}{2\sqrt{2x+5}}$$

4.13. Charakteristische Punkte

Ableitung ist ein Werkzeug zur Untersuchung von Funktionen auf charakteristische Punkte.

4.13.1. Hoch- und Tiefpunkte

$$f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}-2x^3+2x^2+8x+1$$



Visuell auffällig: Lokale Extrema

HOCHPUNKT (Bergspitze)	TIEFPUNKT (Talboden)
Höchster Punkt in einer Umgebung	Tiefster Punkt in einer Umgebung

4.13.1.1. Beobachtung

Lokale Extrema sind <u>NICHT</u> unbedingt auch das Maximum resp. Minimum der Funktion!

4.13.1.2. Ziel

Genaue Lokalisierung der Extrema

Beobachte das Verhalten der Ableitung als Strategie:

→ Bedingung für Extrema: $f'(x_E)=0$

bei uns: $f'(x)=x^4-x^3-6x^2+4x+8$

nun folgende Gleichung lösen:

$$\boxed{x^4-x^3-6x^2+4x+8=0}$$

Probieren:

$x=-1 \Rightarrow f'(x)=1+1-6-4+8=0$

➔ $\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=(x+0)(x^3-2x^2-4x+8) \\ x^4-x^3-6x^2+4x+8:(x+1)=x^3-2x^2-4x+8 \end{array}}$

Probieren:

$x=-2 \Rightarrow f'(-2)=0$

➔ $\boxed{f'(x)=(x+1)(x+2)(x^2-4x+4)=(x+1)(x+2)(x-2)^2}$

Ergebnis (Nullstellen der Ableitung)

$f'(x)=0$ für:

$x=-1$

$x=-2$

$x=2$

Das heisst:

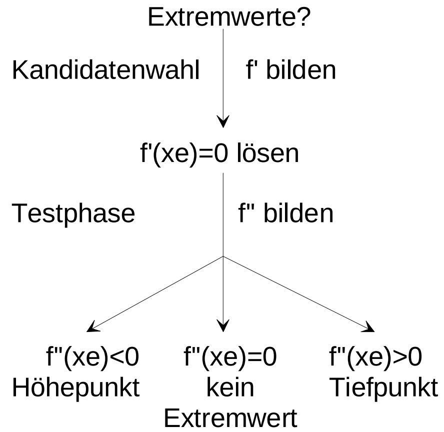
- 3 Kandidaten für Extrema, aber nur 2 erwartet
- Bedingung $f'(x)=0$ alleine nicht ausreichend

Test für die Kandidaten benötigt!

4.13.1.3. Beobachtung

- Beim Extrema verändert sich das <u>Vorzeichen</u> der Ableitung!
- D.h. echte Schnittpunkte der Funktion f' mit der x-Achse
- Also $(f')'(-2)<0$ bzw. $(f')'(-1)>0$ und $(f')'(2)=0$
- Durch $(f')'=f''$ können die Kandidaten unterschieden werden!

4.13.1.4. Zusammenfassung

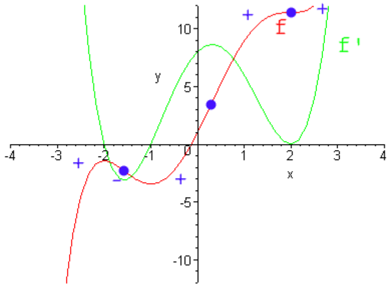


bei uns: $f''(x)=4x^3-3x^2-12x+4$

Test:

- $f''(-1)=-4-3+12+4=9>0$
  also x=-1 → Tiefpunkt
- $f''(-2)=-32-12+24+4=-16<0$
  also x=-2 → Höhepunkt
- $f''(2)=32-12-24+4=0$
  also x=2 → kein Extrema

4.13.2. Wendepunkte



Wo geht die Linkskurve in eine Rechtskurve über? ➔ WENDEPUNKTE

➔ Extrempunkte von f'

Zusammenfassung

Wendepunkte?

Kandidatenwahl | f" bilden

↓

f"(x_w)=0 lösen

Testphase | f"' bilden

f"'(x_w)<0 Wechsel v. links -> rechts

f"'(x_w)=0 kein Wendepunkt

f"'(x_w)>0 Wechsel v. rechts -> links

bei uns:

$$f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

müssen $f''(x) = 0$ lösen; also

$$4x^3 - 3x^2 - 12x + 4 = 0$$

probieren: $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 32 - 12 - 24 + 4 = 0$

➔ $f''(x) = (x-2)(4x^2 + 5x - 2)$

➔ $f''(x) = 0$ falls $\boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{-5+\sqrt{57}}{8} = 0.32 \\ x = \dfrac{-5-\sqrt{57}}{8} = -1.57 \end{array}}$

Test

$$f'''(x) = 12x^2 - 6x - 12$$

$$f'''(2) = 48 - 12 - 12 = 24 > 0$$

$$f'''(0.32) = ... > 0$$

$$f'''(-1.57) = ... > 0$$

d.h. 3 Wendepunkte!

5. Integrieren

5.1. Generell

Zu jeder Operation gibt es eine Umkehroperation:

$+ <=> -$

$\cdot <=> :$

$a^x <=> \sqrt[x]{a}$

$e <=> \ln$

5.2. Grundproblem:

Gesucht wird zu einer Funktion f eine Funktion mit F'=f

Beispiel

$f = 2x => F = x^2$ denn $F' = 2x = f$

$f = 2x => F = x^2 + 5$ denn $F' = 2x = f$

Beobachte

Die Stammfunktion F von f ist <u>nicht</u> eindeutig bestimmt; alle Stammfunktionen unterscheiden sich in einer Konstanten $c \in R$

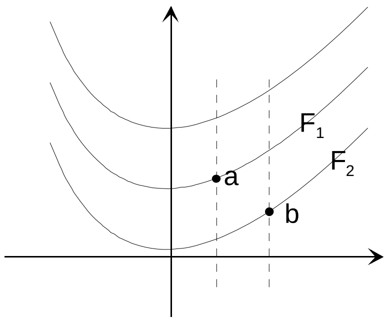
d.h. F_1 und F_2 Stammfunktionen von f also $F_1' = f = F_2'$, dann gilt $F_1 - F_2 = c \in R$.

5.3. Definition unbestimmtes Integral

Das <u>unbestimmte</u> Integral von f $f(x)dx$ ist die Menge aller Stammfunktionen von f.

Beispiel

- $2xdx = \{x^2 + c \mid c \in R\}$
- $x^2 dx = \left\{\frac{1}{3}x^3 + c \mid c \in R\right\}$



$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$

d.h. die Differenz für alle Stammfunktionen gleich (intrinsische Eigenschaft).

5.4. Definition bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral von f zwischen a und b wird gegeben durch die eindeutig bestimmte Zahl für eine Stammfunktion F.

$$\int_a^b f(x)dx => F(b) - F(a)$$

Beispiel

$$\int_1^2 2dx = x^2 \Big|_1^2$$

$$= 2^2 - 1^2 = 3$$

$$= x^2 + 5 \Big|_1^2$$

$$= 2^2 + 5 - (1^2 + 5)$$

$$= 2^2 - 1^2 = 3$$

5.5. Rechenregeln

- $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_y^b g(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

  $F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$
- $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$

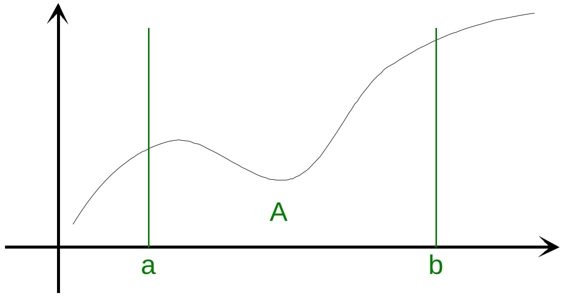
  $F' = f => c \cdot F' = c \cdot f$

5.6. Geometrische Interpretation

Sei $f(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$ dann gilt:

$$\int_b^a f(x)dx = A$$

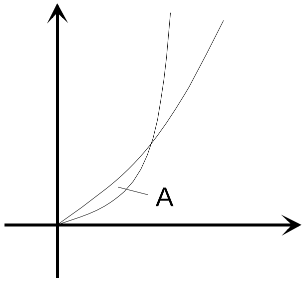
mit A der Fläche unter der Kurve von f, d.h.



$$\int_a^b f(x)dx$$

Beispiel

Berechne den Flächeninhalt der rechts von der y-Achse liegt und an den Kurven $y = x^2$ und $y = x^4$ begrenzt wird.



$$\begin{aligned} x^2 &= x^4 \\ 0 &= x^4 - x^2 \\ &= x^2(x^2 - 1) \\ x = 0 &\text{ oder } x^2 = 1 \\ x = 0 &\text{ oder } x = \pm 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^4 dx = A$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\right) - \left(\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 x^2 - x^4 dx$$