1 Aussagenlogik & mathematische Beweise

1.1 Aussagen

Def: **Aussagen** sind Sprachkonstrukte, die entweder **wahr** oder **falsch** sind.

Bsp:
- Bern ist die Hauptstadt der Schweiz ✓
- 1 + 1 = 2 ✓
- ~~x + 1 = 2~~
- ~~Wie viel Uhr ist es?~~

d.h. Viele umgangssprachliche Formulierungen sind **keine** Aussagen.

Bez: $1 + 1 = 2 \equiv p$
p ist der Name der Aussage 1 + 1 = 2

1.2 Operatoren

Bekannte Aussagen können zu komplexeren Aussagen verbunden werden.

Operator	Symbol	Synonym
Negation	$\neg$	NOT
Konjunktion	$\wedge$	AND
Disjunktion	$\vee$	OR
Exklusion	$\oplus$	EXOR
Implikation	$\rightarrow$	
Äquivalenz	$\leftrightarrow$	

p	**q**	**$p \wedge q$**	**$p \vee q$**	**$p \oplus q$**	**$p \rightarrow q$**	**$p \leftrightarrow q$**
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T

Bsp:

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv p_1$	**$p \rightarrow q$**	**$q \rightarrow p$**	**$p \leftrightarrow q \equiv p_2$**	**$p_1 \leftrightarrow p_2$**
T	T	T	T	T
F	F	T	F	T
F	T	F	F	T
T	T	T	T	T

1.3 Tautologien

Def: Eine zusammengesetzte Aussage, welche **immer wahr** (falsch) ist, unabhängig von den Wahrheitswerten der Teilaussagen, heisst **Tautologie** (Widerspruch).

Bsp:
- $p \vee \neg p$ ist eine Tautologie
- $p \wedge \neg p$ ist ein Widerspruch

p	**¬p**	**p ∨ ¬p**	**p ∧ ¬p**
T	F	T	F
F	T	T	F

Def: Zwei Aussagen p und q heissen logisch äquivalent, falls $p \leftrightarrow q$ eine Tautologie ist.

Bez: Man schreibt $p \Leftrightarrow q$ (Tautologie).

Bsp:
- $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
- $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$
- $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Ueb: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

p	**q**	**p ∧ q**	**¬(p ∧ q)**	**¬p**	**¬q**	**¬p ∨ ¬q**
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

1.4 Prädikate

Def: Ein Prädikat ist ein Sprachkonstrukt, welches unspezifizierte Variablen enthält und durch Einsetzen von Werten zu einer Aussage wird.

Bsp: $x + 1 = 2$ Keine Aussage
  ↓ ersetzen von x durch 2
$2 + 1 = 2$ Aussage

$p(x) \equiv x + 1 = 2$ einstelliges Prädikat
$q(x,y,z) \equiv x + y = z$ dreistelliges Prädikat
$q(x,1,2) \equiv x + 1 = 2 \equiv p(x)$ einstelliges Prädikat

Ersetzen von Variablen auf zwei Arten:

- $\forall x : x + 1 = 2$ „für alle x“ universeller Quantor
- $\exists x : x + 1 = 2$ „es gibt ein x“ existenzieller Quantor

Bsp:
- $\forall x : x + 1 = 2$ F Aussage
- $\forall x \forall y \exists z : x + y = z$ T Aussage
- $\exists x : x + 1 = 2$ T Aussage

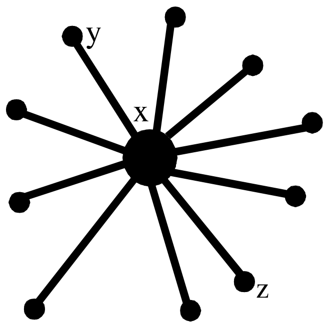
Ueb: Wie sieht das Strassennetz aus, welches durch die folgende Aussage definiert wird?

$F(x,y) \equiv$ „es gibt eine Strasse von x nach y“

$p \equiv \exists x \forall y \forall z : (F(x,y) \land F(x,z) \land x \neq y \land x \neq z \land y \neq z) \rightarrow \neg F(y,z)$

Antwort:

Das Strassennetz ist sternförmig aufgebaut!



1.5 Repetition Lektion vom 28.10.2002

Aussagenlogik: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall x$, $\exists x$

Def: Mathmatische Aussagen sind wahre Ausagen der Form $p \rightarrow q$ oder $p \leftrightarrow q$.
d. h.
- „$p \leftrightarrow q$" ist wahr falls $p = T = q$ oder $p = F = q$
- „$p \rightarrow q$" ist wahr falls $p = T = q$ oder $p = F$

Bez: $p \Leftrightarrow q$ oder $p \Rightarrow q$

1.6 Beweisprinzipien

1.6.1 direkter Beweis

$((p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q) \Leftrightarrow T$
„wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie gerade"

$p \equiv$ die Zahl ist durch 4 teilbar
$q \equiv$ die Zahl ist gerade

die Zahl n ist durch 4 teilbar
⇨ $\forall x : n = 4 * x = (2 * 2) * x = 2 * (2 * x)$
⇨ $\exists y : n = 2 * y$ d. h. n ist durch 2 teilbar
d. h. n ist gerade

1.6.2 Beweis durch Kontraposition

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

$\neg q \equiv$ die Zahl ist ungerade
$\neg p \equiv$ die Zahl ist nicht durch 4 teilbar

$\neg q \rightarrow \forall x : n \neq 2 * x$ $\quad$ $n \neq 2 * 1, 2 * 2, 2 * 3, 2 * 4, 2 * 5, 2 * 6, \ldots$
$\rightarrow \forall y : n \neq 2 * (2 * y) = 4 * y$
d. h. n ist nicht durch 4 teilbar $\equiv \neg p$

1.6.3 Widerspruchsbeweis

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \rightarrow F)$

die Zahl ist durch 4 teilbar und die Zahl ist ungerade

⇨ $\exists x : n = 4 * x = 2 * (2 * x)$
d. h. n ist gerade und ungerade $\rightarrow F$
$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$

Bsp: Satz von Gauss:

$\forall n \in \mathbb{N}^* : p(n) \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \dfrac{n * (n+1)}{2}$

für solche Typen von Problemen gibt es eine praktische Beweismethode:

<u>vollständige Induktion</u>
$\forall n : n \geq n_0 \to p(n) \Leftrightarrow p(n_0) \wedge (n : n \;\; n_0 \to (p(n) \to p(n+1))$

<u>Mechanismusgrafik</u>

Bew: bei uns $n_0 = 1$

Induktionsanfang (Start):
$p(1) \equiv 1 = \dfrac{1 * (1+1)}{2}$

Induktionsschritt (Mechanismus):
wissen: p(n) wahr
zu zeigen: p(n+1) wahr

$p(n+1) \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n + 1) = \boxed{\dfrac{(n+1) * (n+2)}{2}}$

$1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n + 1)$
$= (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) + (n + 1)$
$= \boxed{\dfrac{n * (n+1)}{2}} + (n + 1)$
$= \dfrac{n * (n + 1) + 2 * (n + 1)}{2} = \boxed{\dfrac{(n+2) * (n+1)}{2}}$ ✓

■ Ende vom Beweis

Bsp:
Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$, dann gilt $p(n) \equiv n \in \mathbb{N} : q^0 + q^1 + ... + q^n = \frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}$

Bew: $n_0 = 0$

Induktionsanfang:

$p(0) \equiv q^0 = 1 = \frac{(1-q^{0+1})}{(1-q)}$

Induktionsschritt:

bekannt: $p(n) \equiv q^0 + ... + q^n = \frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}$

zu zeigen: $p(n+1) \equiv q^0 + ... + q^{n+1} = \boxed{\frac{(1-q^{n+2})}{(1-q)}}$

$$
\begin{aligned}
& q^0 + ... + q^{n+1} \\
&= q^0 + ... + q^n + q^{n+1} \\
&= \boxed{\frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}} + q^{n+1} \\
&= \frac{(1-q^{n+1} + q^{n+1} * (1-q))}{(1-q)} = \frac{(1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2})}{(1-q)} = \boxed{\frac{(1-q^{n+2})}{(1-q)}} \quad \blacksquare \checkmark
\end{aligned}
$$

1.7 Aufgabenbesprechung Übungsblatt 1

1) d) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

verwende:

b) $\neg p \lor q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

$\neg \square \lor \square \quad \square \rightarrow \square$

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \lor q$

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(\neg q) \lor \neg p$

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \quad \neg q \rightarrow \neg p$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 5 \rightarrow (2^n > n^2)$

Induktionsanfang: $n_0 = 5$

$p(5) \equiv 2^5 = 32 > 25 = 5^2$

Induktionsschritt: $p(n)$ ✓

zu zeigen: $p(n+1) = 2^{n+1} > (n+1)^2$

$2^{n+1} = 2^n * 2 > n^2 * 2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

ist ok, falls $n^2 > 2n + 1$ richtig ist ⇨ dann fertig ■

Beweis von $n^2 > 2n + 1$:

$n \geqslant 5 > 3 = 2 + 1 > 2 + \frac{1}{n}$

$n > 2 + \frac{1}{n} \quad | *n$

$n^2 > (2 + \frac{1}{n}) * n = 2n + 1$

3) b) $M = \{1, ..., n\}$

$\mathcal{P}(M)$ ist 2^n Elemente

||

Menge aller Teilmengen von M

Bsp: $M = \{1, 2, 3\}$

⇨ $\mathcal{P}(M) = \{ , \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \rightarrow 8 = 2^3$

$\forall n \in \mathbb{N} : p(n) \equiv (M \text{ n-elementig} \rightarrow \mathcal{P}(M)\ 2^n\text{-elementig})$

Induktionsanfang: $n_0 = 0$

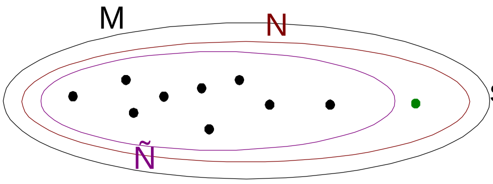
⇨ $M = 0$ (leere Menge)

⇨ $\mathcal{P}(M) = \{0\} \rightarrow 2^0 = 1$

Induktionsschritt: p(n) ✓

$M = \{1, ..., n+1\}$ n+1 Elemente

zu zeigen: $\mathcal{P}(M)$ hat 2^{n+1} Elemente



sei $N \subseteq M$ Teilmenge

⇨ $n+1 \in N$ oder $n+1 \notin N$

① - falls $n + 1 \notin N$

⇨ $N \subseteq \{1, ..., n\}$

⇨ $N \in \mathcal{P}(\{1, ..., n\})$

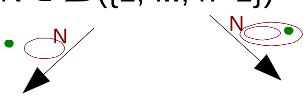
d. h. N liegt in der Potenzmenge der n-elementigen Menge $\{1, ..., n\}$

② - falls $n + 1 \in N$

betrachte $\tilde{N} = N \setminus \{n * 1\}$

⇨ $\tilde{N} \in \mathcal{P}(\{1, ..., n\})$

jetzt $N \in \mathcal{P}(\{1, ..., n+1\})$



N ist Typ ①		N ist Typ ②		
2^n Möglichkeiten	+	2^n Möglichkeiten	=	2^{n+1} ■

1.8 Ersetzen von Operatoren

Ersetzen der Operatoren $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ durch $\neg$, $\wedge$, $\vee$

- $\oplus$
  $p \oplus q \Leftrightarrow p \leftrightarrow \neg q \Leftrightarrow A = \neg B$

p	q	p ⊕ q	¬q	p ↔ ¬q
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	F	T
F	F	F	T	F

- $\leftrightarrow$
  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow A = B$
  (siehe Beispiel Tautologie)

- $\rightarrow$
  $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow A \subseteq B$
  (Übungsblatt)

Problem: Aussagen sind präzise aber völlig unverständlich!

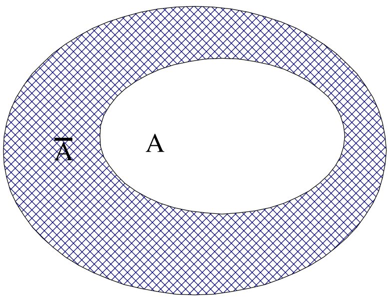
‖

‖ Veranschaulichung durch Mengen.

‖

aussagenlogische Verknüpfungen als Mengenoperationen!

1.8.1 Komplement

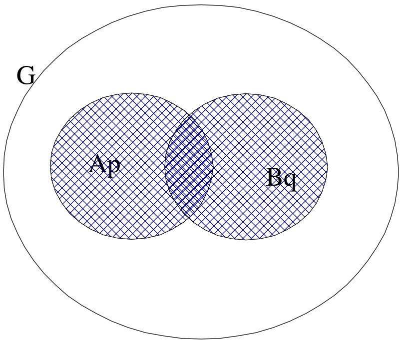


$\neg p \Leftrightarrow \overline{A}$ $\quad \overline{A}$ Komplement von A = Alle Elemente, die nicht zu A gehören.

A = Menge der Elemente aus G, welche Aussage p efrüllen.
$A = \{ n \in \mathbb{N} / 2^n > n^2 \} = \{5,6,7,8,...\}$

1.8.2 Vereinigung

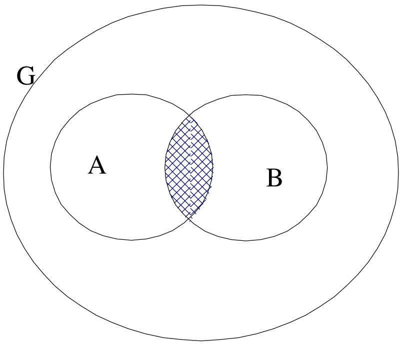
$p \vee q \Leftrightarrow A \cup B$



p = gerade Zahl A = {2,4,6,8,10,12,...}
q = durch 3 teilbar B = {3,6,9,12,...}

1.8.3 Schnitt

$p \wedge q \Leftrightarrow A \cap B$



damit lassen sich Rechenregeln leichter beweisen.

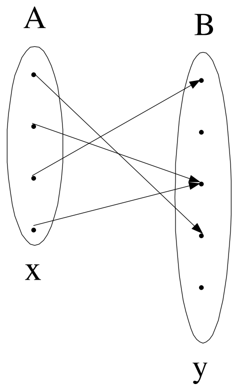
Statt logischen Verknüpfungen kann man Mengenoperationen verwenden.
$\|$
Logik ersetzten durch Mengen

➪ *die Grundlage der Mathematik sind Mengen!*

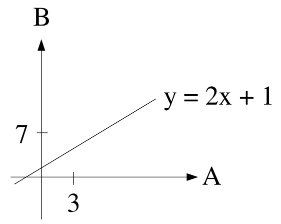
Mathematik = Strukturierung von Mengen (Daten)

2 Geordnete Mengen

Seien A,B zwei Mengen und f: A → B eine Funktion



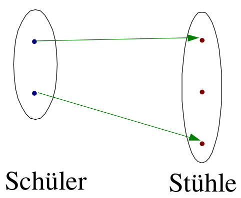
➩ f ordnet <u>jedem</u> Element in A ein Element in B zu.



➩ f baut eine Beziehung zwischen A und B auf, d.h. f setzt zwei Mengen in Verbindung.

2.1 Wichtige Arten von Beziehungen für Funktionen f : A → B

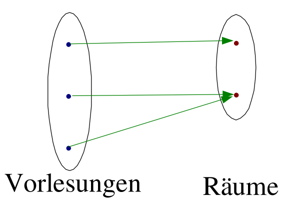
-f injektiv ⇔ $\forall\, x1, x2 \in A : f(x1) = f(x2) \rightarrow x1 = x2$



„jedem Schüler wird ein Stuhl in F302 zugeordnet“

Höchstens ein Pfeil „ $A \leqslant B$ “

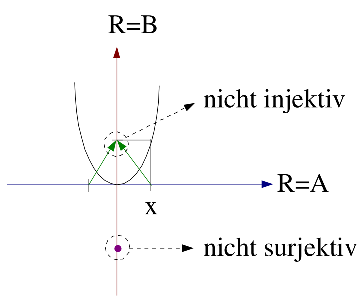
- f surjektiv ⇔ $\forall\, y \in B\, \exists\, x \in A : f(x) = y$



„jeder Vorlesung wird ein Raum zugeordnet“

Mindestens ein Pfeil „ $A \geqslant B$ “

Bsp. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\, x \rightarrow x^2$

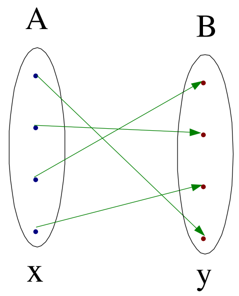


Ist eine Parabel, aber weder surjektiv noch injektiv

- f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbb{R} \geq 0},\, x \rightarrow x^2$ surjektiv, aber nicht injektiv
- f: $\mathbb{R}_{\mathbb{R} \geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbb{R} \geq 0},\, x \rightarrow x^2$ surjektiv und injektiv = bijektiv

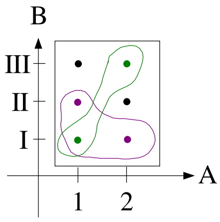
Beachte: Eine Funktion besteht aus Definitionsmenge A, Wertemenge B und Funktionsvorschrift $x \rightarrow f(x)$

- f bijektiv ⇔ f injektiv und f surjektiv



Genau ein Pfeil „ $A \approx B$ “

Jede Funktion $f: a \to b$ kann als Teilmenge von $A \times B$ aufgefasst werden.



$\mathcal{R}_f = \{(x, y) \in a \times b / f(x) = y\}$

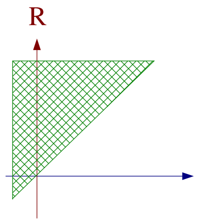
Relationen verallgemeinern diese Situation!

2.2 Relationen

Def: Eine (zweistellige) Relation $\mathcal{R}$ zwischen zwei Mengen A und B ist nichts anderes als eine Teilmenge $R \in A \times B$

Bem: falls A = B dann heisst eine Relation zwischen A und B kurz eine Relation auf A

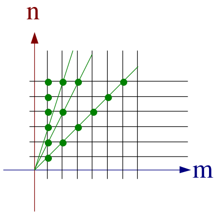
Bsp: - $R_{<=} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
gegeben durch $(x, y) \in R_{<=} \Leftrightarrow x \leq y$



Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$

- $R_I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

gegeben durch $(m, n) \in R_I \Leftrightarrow \text{"m teilt n"}$ d.h. $\exists k \geq 1 : n = m * k$

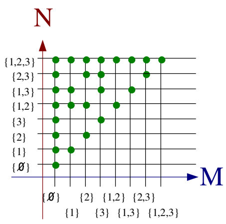


Teilrelation auf $\mathbb{N}$

- Sei L eine Menge und $\mathcal{P}$(L) die Potenzmenge von L dann wird durch

$$(M, N) \in P(L) \times P(L) \Leftrightarrow M \subseteq N$$

eine Relation auf $\mathcal{P}$(L) gegeben, der sog. Mengenverband auf L



Def: Sei R eine Relation auf A, dann heisst R:

- Reflexiv $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A : (x, x) \in R$ (die Diagonale gehört zur Relation)
- Transitiv $\Leftrightarrow$ $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$
  (2 teilt 6, 6 teilt 12, somit teilt 2 auch 12)

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow \overset{6}{y} = \overset{3}{c_1} * \overset{2}{x}$$

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow \overset{12}{z} = \overset{2}{c_2} * \overset{6}{y} = \overset{2}{c_2}(\overset{3}{c_1} * \overset{2}{x}) = (\overset{3}{c_1} * \overset{2}{c_2}) * \overset{2}{x}$$

- Symmetrisch $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$
- Antisymmetrisch $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$

Relation R auf A (d.h. $R \subseteq A \times A$)

- reflexiv: $\forall x \in A : (x, x) \in R$

Bsp.: PO Ordnungsrelation $R_{>=}$ (auf $\mathbb{R}$)
PO Teilerrelation R_{I} (auf $\mathbb{N}$)
PO Mengenverband $R_{\text{Teilmenge}}$ (auf P(L))

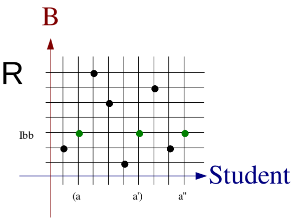
ÄQ A = Menge der Studenten der HTA
B = {A, Abb, B, E, HLK, M, I, Ibb}

$$R = \{(a, b) \in A \times \text{¿}\, a \text{ Student in Abt. } b\}$$

R nicht reflexiv, da R <u>keine</u> Relation <u>auf</u> A

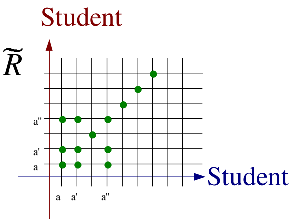
$$\widetilde{R} = \{(a, a') \in A \times A \,/\, \exists b \in B : (a, b) \in R \wedge (a', b) \in R\}$$

R



„a und a' studieren in derselben Abteilung"
relativ, transitiv, symmetrisch,
~~antisymmetrisch~~

$\widetilde{R}$



- transitiv: $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

transitiv: $(x, y) \in \widetilde{R} \wedge (y, z) \in \widetilde{R}$
d.h. x und y studieren in derselben Abteilung
$\wedge$ y und z studieren in derselben Abteilung
$\rightarrow$ x und z studieren in derselben Abteilung
d.h. $(x, z) \in \widetilde{R}$

- symmetrisch: $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$

symmetrisch: $(x, y) \in \widetilde{R}$
d.h. x und y studieren in derselben Abteilung
$\rightarrow$ y und x studieren in derselben Abteilung
d.h. $(y, x) \in \widetilde{R}$

- ● antisymmetrisch: $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$

  antisymmetrisch: $R_{>=} : x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$

  R_I : x teilt y und y teilt x

  d.h $\left.\begin{array}{l} \exists c : y = x * c \\ \exists \tilde{c} : y = x * \tilde{c} \end{array}\right\} y = (y * \tilde{c}) * c = y * \tilde{c} * c \Rightarrow \tilde{c} * c = 1 \Rightarrow \tilde{c} = 1 = c$

  ⇒ x = y

  $R_{\text{Teilmenge}} : x \subseteq y \wedge y \subseteq x \rightarrow x = y$

  $\widetilde{R}$: ist nicht antisymmetrisch
  (falls in jeder Abteilung mehr als ein Student studiert)

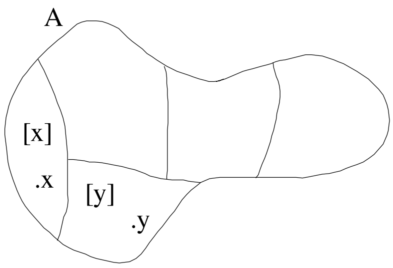
Def: Eine Relation R auf A heisst
- Äquivalenzrelation, falls sie refflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
- Partielle Ordnung, falls sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Eigenschaften
- Sei R eine Äquivalenzrelation auf A

  sei $x \in A$, setzte $[x] := \{ y \in A / (x, y) \in R \}$

  bei uns: $\widetilde{R} : [a] = \{ a' \in A / (a, a') \in \widetilde{R} \}$ = Alle Studenten, die in derselben Abt. studieren, wie Student a
  = Studenten der Abt. Ibb

  diese Menge heisst <u>Äquivalenzklasse</u> (Teilmenge von A) von x



für $y \in A$ gilt : $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$

Die Menge A wird zerlegt (partitioniert)

In jedem Block sind gerade diejenigen Elemente, welche in Relation stehen.

Beweis:

sei $a \in [x] \cap [y]$

⇨ d.h. $(x, a) \in R \wedge (y, a) \in R$

⇨ $(x, a) \in R \wedge (a, y) \in R$ da R symmetrisch

⇨ $(x, y) \in R$ da R transitiv

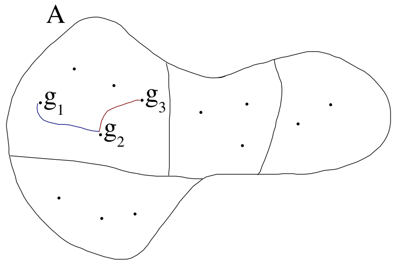
⇨ $y \in [x] \wedge x \in [y]$

⇨ $[y] \subseteq [x] \wedge [x] \subseteq [y]$

⇨ $[y] = [x]$ ■

2.3 Aufgabenbesprechung Übungsblatt 2

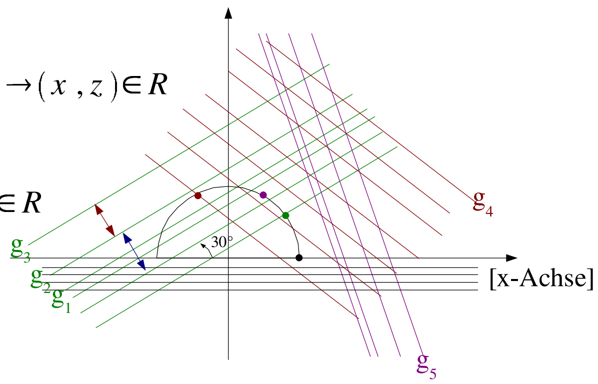
2.3.1 Äquivalenzrelation R auf A



- reflexiv
- transitiv
- symmetrisch

A = Menge der Geraden in der Ebene
R = $\{(g_1, g_2) \in A \times A \,/\, g_1 \text{ parallel zu } g_2\}$

- reflexiv: $\forall x \in A : (x, x) \in R$
  d.h. Jede Gerade ist parallel zu sich selbst
- transitiv: $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$
  d.h. g_1 parallel zu g_2 und g_2 parallel zu g_3
  $\rightarrow$ g_1 parallel zu g_3
- symmetrisch: $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$
  d.h. g_1 parallel zu $g_2 \rightarrow g_2$ parallel zu g_1



2.3.2 Äquivalenzklassen

$[g_1]$ = Menge aller zu g_1 parallelen Geraden = $\{g \in A \,/\, (g_1, g) \in R\}$

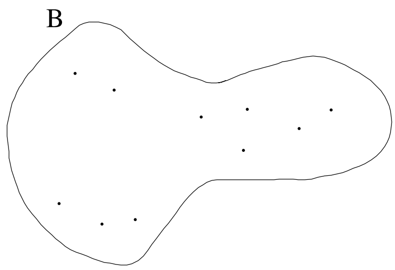
2.3.3 Partielle Ordnung

Def: Eine Relation auf A heisst partielle Ordnung, falls sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Bsp:
- Ordnungsrelation $R_{<=}$
- Teilerrelation $R_{|}$
- Mengenverband $R_{\subseteq}$

B = Menge der Äquivalenzklassen = $\{[g_1], [g_2], [g_3], \ldots\}$

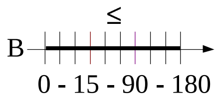
$\sphericalangle\, [g_1] = 30°$
R = $\{([g],[h]) \in B\text{x}B \,/\, \sphericalangle\, [g] \leq \sphericalangle\, [h]\}$
$([g_1],[g_4]) \in R$



- reflexiv: $\sphericalangle[g] \leq \sphericalangle[g]$
- transitiv: $\sphericalangle[g_1] \leq \sphericalangle[g_2] \wedge \sphericalangle[g_2] \leq \sphericalangle[g_3] \rightarrow \sphericalangle[g_1] \leq \sphericalangle[g_3]$
- antisymmetrisch: $\sphericalangle[g] \leq \sphericalangle[h] \wedge \sphericalangle[h] \leq \sphericalangle[g] \rightarrow [g] = [h]$

  ⇨ $\sphericalangle[g] = \sphericalangle[h]$

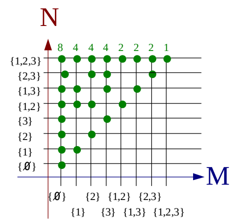
Bem: Partielle Ordnung „sortieren“ die Menge!



Mengenverband: $M=\{1,2,3\} \rightarrow P_{(M)}$

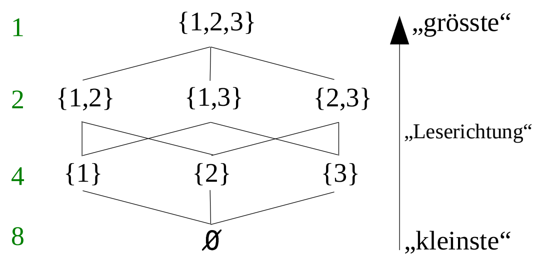
auf der Potenzmenge Relation gegeben durch Teilmengen „⊆“

$P_{(M)}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$



Ordnungsshema (Möglichkeit diese Elemente zu sortieren)

„Hasse-Diagramm“



$(A, \leq_A), (B, \leq_B)$ partielle Ordnungen

$\Rightarrow (A \times B, @)$

kurz $(a,b) @ (c,d)$

falls a $\leq_A$ c und b $\leq_B$ d

⇨ partielle Ordnung auf dem Produkt

Lexikon-Ordnung

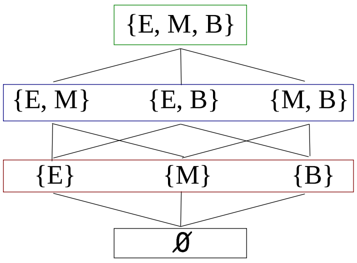
$da \geq cat \geq car \geq bar$

Bsp. Multilevel Security Policy

({1, ..., n}, $\leq$) Sicherheitsstufen

($P_{(M)}$, $\subseteq$) Datenmenge

M = {Entwicklung, Management, Buchhaltung} x {allgemein, geheim}



grafik

M = {1, 2, 3}

R_1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 2)} partielle Ordnung?

⇨ reflexiv $((3,3) \notin R_1)$

R_2 = $R_1 \cup \{(3,3),(2,3)\}$

⇨ transitiv $\forall x,y,z \in M : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$

(1, 1) $\wedge$ (1, 2) $\rightarrow$ (1, 2)

(1, 2) $\wedge$ (2, 2) $\rightarrow$ (1, 2)

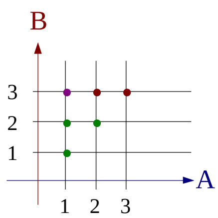
(1, 2) $\wedge$ (2, 3) $\rightarrow$ $\cancel{(1, 3)}$

(2, 2) $\wedge$ (2, 3) $\rightarrow$ (2, 3)

⇨ antisymmetrisch: $\forall x,y \in M : (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \rightarrow x = y$

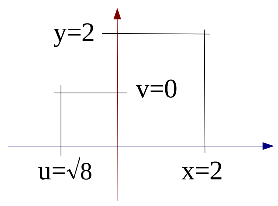
R_3 = $R_2 \cup \{(1,3)\}$

refflexiv, transitiv, antisymmetrisch ⇨ partielle Ordnung



$R^{2,}(x,y)\sim(u,v):\Leftrightarrow x^2+y^2=u^2+v^2$

~ ist eine Relation auf R^2



reflexiv: $\forall a\in M:(a,a)\in R$
bei uns: $(x,y)\in R^2:(x,y)\sim(x,y)$

transitiv: $\forall a,b,c\in M:(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R\to(a,c)\in R$
bei uns: $\forall(x,y),(u,v),(z,w)\in R^2:(x,y)\sim(u,v)$
$\wedge(u,v)\sim(z,w)\to(x,y)\sim(z,w)$
d.h. $x^2+y^2=u^2+v^2\wedge u^2+v^2=z^2+w^2\to x^2+y^2=z^2+w^2$

antisymmetrisch: $\forall a,b\in M:(a,b)\in R\wedge(b,a)\in R\to a=b$
bei uns: $x^2+y^2=u^2+v^2\wedge u^2+v^2=x^2+y^2\to(x,y)=(u,v)$
d.h. $x=u\wedge y=v$

symmetrisch: $\forall a,b\in M:(a,b)\in R\to(b,a)\in R$
bei uns: $(x,y)\sim(u,v)\to(u,v)\sim(x,y)$
$x^2+y^2=u^2+v^2\to u^2+v^2=x^2+y^2$

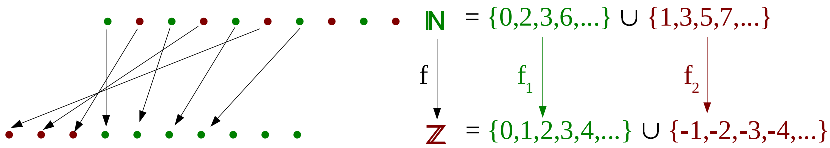
⇨ ~ Äquivalenzrelation
Äquivalenzklassen ?
$a\in M:[a]=\{b\in M/(a,b)\in R\}$
bei uns: $[(u,v)]=\{(x,y)\in R^2/x^2+y^2=u^2+v^2\}$

(u,v) = (2,2)
$[(2,2)]=\{(x,y)\in R^2/x^2+y^2=8\}$ Kreis mit Radius $\sqrt{u^2+v^2}$

2.3.4 Aufgabe 2

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ z.z. Bijektion

$$f(n) = \begin{cases} -m \text{ falls } n = 2m-1 \\ m \text{ falls } n = 2m \end{cases}$$



! f ist bijektiv, falls f_1 und f_2 bijektiv sind !

f_1

$$f_1: \{0,2,4,6,...\} \to \{0,1,2,3,4,...\}$$
$$m \to \frac{m}{2} = n$$

injektiv: $\forall x, y \in A: f(x) = f(y) \to x = y$

$$\forall n, \tilde{n} \in N_g: \frac{n}{2} = \frac{\tilde{n}}{2} \to n = \tilde{n}$$

surjektiv: $\forall y \in B \, \exists x \in A: f(x) = y$

$$\forall n \in N \, \exists m \in N_g: \frac{n}{2} = n \Leftrightarrow m = 2n$$

⇨ bijektiv

f_2

$$f_2: 1,3,5,7,... \to -1,-2,-3,-4,... \qquad n \to \frac{-n+1}{2}$$

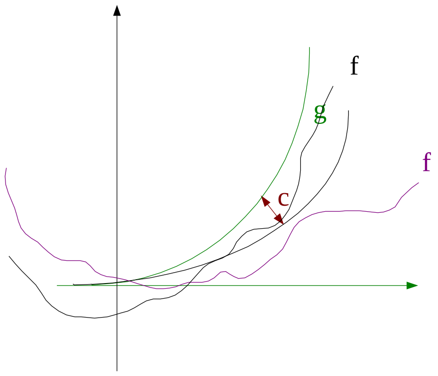
injektiv: $\forall n, \tilde{n} \in \mathbb{N}_u: \frac{-n+1}{2} = \frac{-\tilde{n}+1}{2} \to n = \tilde{n}$

surjektiv: $\forall n \in \mathbb{Z}_- \, \exists m \in N_u: \frac{-m+1}{2} = n \Leftrightarrow m = -2n-1 = -(2n+1)$

⇨ f ist bijektiv

Bem. ℕ und ℤ sind „gleich gross“

$F = \{ f \ast \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ Funktionen} \}$



$O(g) = \{ f \in F \,/\, \exists c > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall x \geqslant n : |f(x)| \leq c \ast |g(x)| \}$

Funktionen f, die innerhalb der grünen Zonen liegen.

➩ f ist „höchstens so schnell“ wie g.

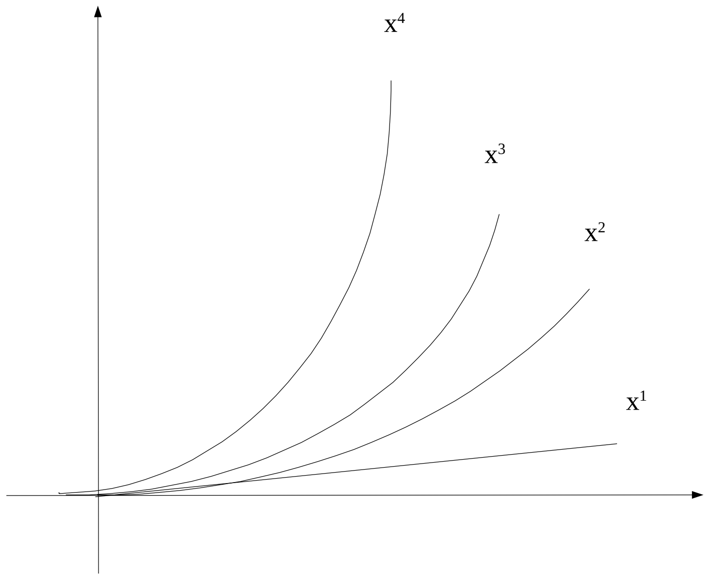
Ω(g) = $\{ f \in F \,/\, \exists c > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall x \geqslant n : |g(x)| \leq c \ast |f(x)| \}$

Funktionen f die ausserhalb der grünen Zone liegen.

➩ f ist „mindestens so schnell“ wie g

Θ(g) = O(g) ∩ Ω(g) = $\{ f \in F \,/\, \exists c_1, c_2 > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall x \geq n : c_1 |g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2 |g(x)| \}$

➩ f ist „gleich schnell“ wie g.



Beh: $f \sim g :\Leftrightarrow f \in \Theta(g)$

<u>reflexiv:</u> $\forall x \in A : (x, x) \in R$

d.h. $\forall f \in F : f \sim f$, d.h. $f \in \Theta(f)$

wähle $c_1 = c_2 = 1$, $n = 0$

$\forall x \geq a : 1 * |f(x)| \leq |f(x)| \leq 1 * |f(x)|$

also $f \in \Theta(f)$

<u>transitiv:</u> $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

d.h. $\forall f_1, f_2, f_3 \in F : f_1 \in \Theta(f_2) \wedge f_2 \in \Theta(f_3) \rightarrow f_1 \in \Theta(f_3)$

$c_1 * |f_2| \leq |f_1| \leq c_2 * |f_2| \quad f_1 \in \Theta(f_2)$

und $\widetilde{c_1} * |f_3| \leq |f_2| \leq \widetilde{c_2} * |f_3| \quad f_2 \in \Theta(f_3)$

$\widetilde{c_1} * |f_3| \leq |f_2| \leq \frac{1}{c_1} * |f_1| \rightarrow c_1 * \widetilde{c_1} \leq |f_1|$

$\frac{1}{c_2} * |f_1| \leq |f_2| \leq \widetilde{c_2} * |f_3| \rightarrow |f_1| \leq c_2 * \widetilde{c_2} * |f_3|$

$\rightarrow c_1 * \widetilde{c_1} * |f_3| \leq |f_1| \leq c_2 * \widetilde{c_2} * |f_3| \qquad f_1 \in \Theta(f_3)$