MT

Formelsammlung

Berufsmaturitätsschule

Luzern

Rainer Meier
Käserei
6288 Schongau
mailto:skybeam@skybeam.ch

Klasse
BML4A
1997 - 2001

1. Inhaltsverzeichnis

2. Ungleichungen

$\boxed{G}$ Grundmenge
$\boxed{R}$ Menge der reellen Zahlen ($\sqrt{2}; \pi$ …)
$\boxed{Q}$ Menge der rationalen Zahlen (1/2; 0.333…)
$\boxed{Z}$ Menge ganzer Zahlen (-10; -5; -2; 3; 5…)
$\boxed{N}$ Menge natürlicher Zahlen ([0]; 1; 2; 3 …).

Werden Terme durch die Zeichen $<; >; \neq; \leq; \geq$ miteinander verbunden so spricht man von Ungleichungen.

2.1. 1. Grad: 1 Unbekannte

$$\begin{array}{l|l} x+3<15 & -3 \\ x<12 & \\ L=\{1,2,...,10\} & \end{array}$$

2.2. Definitionsbereich

$$\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-2}{x+2}<13 \quad \boxed{G}=\boxed{Q}$$

$\boxed{Q}$\{+5}; $\boxed{Q}$\{-2} → „\" = „ohne", da der 1. Bruch mit x=5 eine Division durch 0 ergeben würde (der 2. Bruch bei x=-2).
➔ $\boxed{G}=\boxed{Q}$\{-2, 5}

2.3. Das Inversionsgesetz

1. Lösung

$$\begin{array}{ll} 5-x<12 & |+x \\ 5<12+x & |-12 \\ 5-12<x & \\ -7<x & \end{array}$$

2. Lösung

$$\begin{array}{ll} 5-x<12 & |-5 \\ -x<12-5 & \\ -x<7 & |\cdot(-1) \\ x<-7 & \end{array}$$

Es entsteht ein Widerspruch

$$-x<7 \quad |\cdot(-1)$$
$$x>-7$$

➔ Multiplikation/Division durch **negative** Zahl → Ungleichheitszeichen **drehen**!

3. Potenzen

3.1. Einführung

$$a^n = b$$

a Basis
n Exponent, Hochzahl
b Potenzwert

Voraussetzung:

$$n \in N$$
$$Basis \neq 0$$

N Natürliche Zahlen

3.1.1. Merke

Der Exponent einer Potenz gibt an, wie viel mal die Basis <u>mit sich selber multipliziert</u> werden muss.
Der Exponent bezieht sich nur auf die unmittelbar unterstehende Basis:

3.2. Rechengesetze

3.2.1. Addition, Subrtaktion

$$3a^3-5a^3+2a^2=-2a^3+2a^2$$

3.2.1.1. Merke

<u>Gleiche</u> Potenzen werden addiert oder subtrahiert, indem die Koeffizienten zusammengefasst werden. Unter Wahrung der Vorzeichen.

3.2.2. Multiplikation von Potenzen

Gleiche Basis – beliebige Exponenten:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Ungleiche Basis – gleiche Exponenten:

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

3.2.3. Division von Potenzen

Gleiche Basis, beliebige Exponenten:

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow a^{m-n} = \frac{1}{a^{-(m-n)}} = \frac{1}{a^{-m+n}} \\ \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n} \end{array}}$$

Ungleiche Basis, gleiche Exponenten:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

3.2.4. Merke

$$0^n = 0$$

$$\cancel{0^{-n} = \frac{1}{0^n}} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{NICHT DEFINIERT}$$

$$-a^{-2} = -\frac{1}{a^2} = \frac{-1}{a^2} = \frac{1}{-a^2}$$

3.3. Potenzieren von Potenzen

3.3.1. Allgemein

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$$

Die Exponenten dürfen vertauscht werden.
Gilt aber nur, wenn *a* eine ***<u>positive</u>***, reelle Zahl ist.

3.4. Potenzieren von Summen oder Differenzen

$$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n \;//(a \pm b)(a \pm b)$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Pascal'sches Dreieck:

$(ab)^0=1$	1
$(a+b)^1=a+b$	1 1
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
	1 5 10 10 5 1
	...

3.5. Zerlegen von Summen oder Differenten in Faktoren

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

4. Wurzelrechnung, Radizieren

4.1. Aufbau

$$\sqrt[n]{a} = b$$

n Wurzelexponent
b Wurzelwert
$\sqrt{\ }$ Operationszeichen

4.2. Definition

Unter $\sqrt[2]{a}$ verstehen wir die **nicht negative** Zahl, deren Quadrat a ergibt.

$$a \geq 0$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

$$\sqrt[n]{a}^{\,n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

4.3. Addition, Subtraktion

Vom Potenzieren her wissen wir:
$a^n \pm b^n$ ➔ nicht vereinfachbar
Für die Wurzelrechnung gilt:

$$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

$$3 \cdot \sqrt[n]{a} \pm 5 \cdot \sqrt[n]{a} = [3 \pm 5] \cdot \sqrt[n]{a}$$

<u>Merke</u>: Nur Wurzeln mit gleichen Exponenten und gleichen Radikanten lassen sich durch Addition oder Subtraktion der Koeffizienten zusammenfassen.

$$\sqrt{a^2} \pm \sqrt{b^2} \neq \sqrt{a^2 - b^2}$$

4.4. Multiplikation

mit gleichen Wurzel-Exponenten Potenzieren: $a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{3}}$

Wurzel-Rechnung: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

<u>Merke:</u> Wurzeln mit gleichen Exponenten werden multipliziert indem die Wurzel aus dem Produkt der Radikanten gezogen wird

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

5. Das Logarithmieren

Gleichung: $a^b = x \rightarrow$ x wird durch potenzieren bestimmt

Gleichung: $x^b = a \rightarrow$ x wird durch Radizieren bestimmt

Gleichung: $a^x = b \rightarrow$ x wird durch Logarithmieren bestimmt

5.1. Allgemeines

5.1.1. Merke

Das Logarithmieren ist die zweite Umkehroperation des Potenzierens

$$a^x = b \Rightarrow \log_a b = x$$

5.1.2. Definition

Den Logarithmus berechnen heisst: den Exponenten eine Potenz bestimmen.

$$\log_a b = x$$

$\log_a$=>beliebige Basis
lg=$\log_{10}$=> Basis 10 (Briggscher log. 1610)
ln=$\log_e$=> natürlicher log.
Lb=$\log_2$=> binärer log.

$$\boxed{\log_a b = \frac{\lg_b}{\lg_a} = \frac{\ln_b}{\ln_a}}$$

Log	Operationszeichen
a	Basis
b	Numerus
x	Exponent

5.2. Die Logarithmensätze

5.2.1. Die Produkteregel

$$u \cdot v \Rightarrow \log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

bzw.

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

5.2.1.1. Beweis

$lag_a u = x$ und $\log_a v = y$

$\rightarrow a^x = u$ und $a^y = v$

$\rightarrow u \cdot v = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\rightarrow \log_a(u \cdot v) = x + y$

5.2.2. Die Quotientenregel

$$\frac{u}{v} \rightarrow \log_a u - \log_a v$$

bzw.

$$\boxed{\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y}$$

5.2.3. Die Potenzregel

$$a^x = u^n \rightarrow n \cdot \log_a \cdot u$$

bzw.

$$\log(x^m) = m \cdot \log x$$

5.2.3.1. Beweis

$\text{Log}_a u=x \rightarrow a^x=u$

$\rightarrow u^n = (a^x)^n = a^{x \cdot n}$

$\rightarrow \log_a u^n = x \cdot n$

$\rightarrow \log_a u^n = n \cdot \log_a u$

5.2.4. Die Wurzelregel

$$\sqrt[m]{u^n} \Rightarrow \log_a u^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} \cdot \log_a u$$

Eine Wurzel kann als Bruchpotenz geschrieben werden, es gilt die Potenzregel.

5.2.5. Die Summen- und Differenzregel

$$\lg(3+7) = \lg 10 = 1$$

6. Quadratische Gleichungen

$x^2 = 25$ Unbekannte im Quadrat!

$\boxed{x^2 + px + q = 0}$ Normalform

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ Grundform

6.1. Allgemeine Lösungsformel für quadr. Gleichungen

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

(Aus der Grundform)

6.2. Quadratisch Ergänzung

$$x^2 + ux = 10$$

$$\left(x + \frac{u}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{u}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{u}{2} = \pm\sqrt{10 + \left(\frac{u}{2}\right)^2}$$

$$x_{1,2} = -\frac{u}{2} \pm \sqrt{10 + \left(\frac{u}{2}\right)^2}$$

6.3. Lösungsformel und Lösbarkeit

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

$$x^2 + px = -q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

D<0 ➔ Keine Lösung (Wurzel aus <0)

D=0 ➔ 1 Lösung $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$

D>0 ➔ 2 Lösungen $\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$

6.4. Der Satz von Vieta

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

$$\boxed{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0}$$

6.4.1. Addition der Lösungen

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ➔ Grundform

6.4.2. Multiplikation der Lösungen

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ➔ Grundform

6.4.3. Satz der Faktorenzerlegung

$$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0}$$

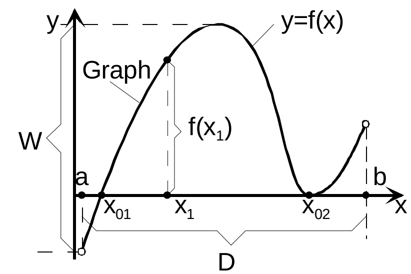
$$x^2 - x \cdot x_1 - x \cdot x_2 + x_1 x_2 = 0$$

$$x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0$$

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

➔ x_1 & x_2 sind einfach bestimmbar

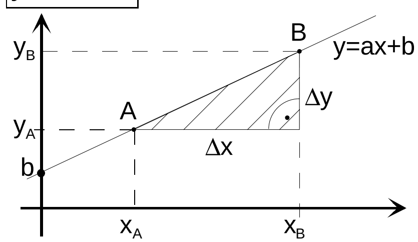
7. Funktionen



x Unabhängige Variable
x-Wert: Argument
y Abhängige Variable
y-Wert: Funktionswert
D Definitionsbereich
W Wertebereich (vom kleinsten bis zum grössten Wert)
x-Achse: **Abszisse**
y-Achse: **Ordinate**
1. Quadrant: x+/y+
2. Quadrant: x-/y+
3. Quadrant: x-/y-
4. Quadrant: x+/y-

7.1. Lineare Funktionen

$$\boxed{y = ax + b}$$

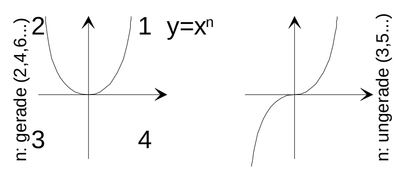


a Steigung
b y-Achsenabschnitt

7.2. Potenzfunktion

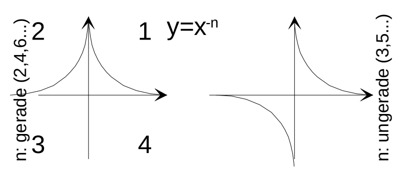
$$y = x^n$$

7.2.1. Ganzzahlige, positive Exponenten



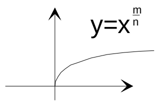
$y = x^n$
n=2,4,6,8...
n=3,5,7,9...

7.2.2. Ganzzahlige, negative Exponenten



$y = x^{-n}$
n=2,4,6,8...
n=3,5,7,9...

7.3. Gebrochene Exponenten, Wurzelfunktion



$$\boxed{y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}}$$

7.4. Umkehrunktion

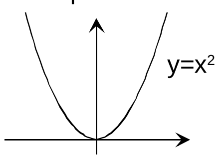
Stammfunktion: $y = x^3$

Umkehrfunktion: $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

7.5. Quadratische Funktionen

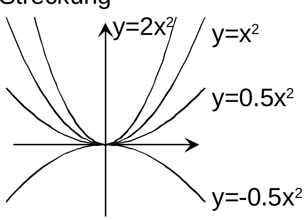
7.5.1. Grafische Darstellung

Normalparabel



$\boxed{y = x^2}$ nennt man **Normalparabel**

Streckung



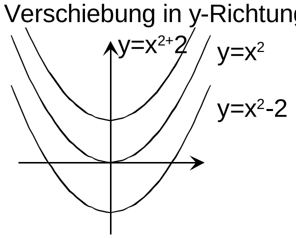
$\boxed{y = mx^2}$

m>1: **Streckung** der Normalparabel in y-Richtung

0<m<1: **Stauchung** der Normalparabel in y-Richtung

m<0: Die Parabel ist nach unten geöffnet (an der x-Achse gespiegelt)

Verschiebung in y-Richtung



$\boxed{y = x^2 + b}$

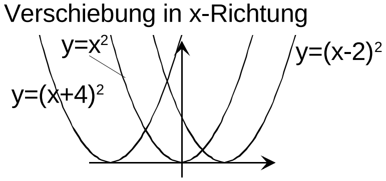
Verschiebung in y-Richtung

b>0: Verschiebung nach **oben**

b<0: Verschiebung nach **unten**

b=0: Keine Verschiebung

Verschiebung in x-Richtung

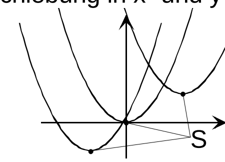


$\boxed{y = (x+a)^2}$

a>0: Verschiebung nach **links**

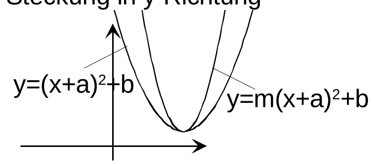
a<0: Verschiebung nach **rechts**

Verschiebung in x- und y-Richtung



Eine Normalparabel mit dem Scheitelpunkt **S(-a/b)** hat die Funktionsgleichung $\boxed{y = (x+a)^2 + b}$

Steckung in y-Richtung



Man bezeichnet die Funktion $y = m(x+a)^2 + b$ als **Scheitelform** der Parabel.

Scheitelpunkt: S(-a/b)

7.5.2. Erstellung der Scheitelform

$y = ax^2 + bx + c$ ➔ quadr. Ergänzen

➔ $\boxed{y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}$

$$\boxed{S\left(-\frac{b}{2a} / c - \frac{b^2}{4a}\right)}$$

7.5.3. Nullstellen der quadratischen Funktion

Definition: y=0

➔ $y = ax^2 + bx + c$

$0 = ax^2 + bx + c$

Dies ist eine Quadratische Gleichung:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$N_1 = (x_1 / 0)$

$N_2 = (x_2 / 0)$

Zur Lösbarkeit und den Lösungsmengen siehe 6.3 „Quadratische Gleichungen“

N_1 Nullstelle 1 (sofern vorhanden)

N_2 Nullstelle 2 (sofern vorhanden)

8. Lineare Gleichungssysteme

8.1. Allgemein

$y = ax + b$

$ax + by = c$

Zur Lösung benötigt man mindestens so viele unabhängige Gleichungen, wie Unbekannte vorhanden sind.

z.B. $\left| \begin{array}{r} 0.25\,x + y = 7 \\ x + y = 10 \end{array} \right|$

8.2. Definition

Wenn man für eine **Anzahl Unbekannte** eine gewisse **Anzahl Gleichungen** hat spricht man von einem Gleichungssystem.
Grundmenge = Reelle Zahlen
Alle Zahlenpaare, Zahlentripel usw. aus G welche die Ausgangsgleichung des Systems in wahre Aussagen überführen bilden die Lösungsmenge L.
Ein Gleichungssystem ist <u>nicht</u> linear, wenn die Unbekannten mit sich selbst multipliziert werden.

8.3. Einsetzungsmethode/ Substitutionsmethode

Geg. $\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 12 \\ 3x + 4y = 1 \end{array} \right|$

(1) nach y auflösen

$3x - 3y = 12$

$3y = 2x - 12$

$y = \frac{2}{3}x - 4 \,|(3)$

(3) in (2) einsetzen

$3x + 4\left(\frac{2}{3}x - 4\right) = 1$

$3x + \frac{8}{3}x - 16 = 1$

$\frac{17}{3}x = 17$

$\frac{1}{3}x = 1$

$x = 3 \,|\, (4)$

(4) in (1) oder in (2) einsetzen
(4) in (1) eingesetzt

$2 \cdot 3 - 3y = 12$

$6 - 3y = 12$

$3y = -6$

$\underline{y = -2} \,|(5)$

Lösung

$\underline{\underline{L = \{(3/-2)\}}}$

8.4. Additionsmethode / Eliminationsmethode

$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left| \begin{array}{l} 3x + 4y = 44 \\ 7x + 3y = 71 \end{array} \right|$

(1) mit 3 und (2) mit –4 erweitern und die 2 Gleichungen addieren ➔ y eliminieren.

$\begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot -4} \end{array} \left\| \begin{array}{r} 9x + 12y = 132 \\ -28x - 12y = -284 \end{array} \right| \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array}$

$-19x = -152$

$\underline{x = 8} \,|(5)$

(5) in (1) oder (2) einsetzen
(5) in (1)

$3 \cdot 8 + 4y = 44$

$24 + 4y = 44$

$4y = 20$

$\underline{y = 5} \,|(6)$

Lösung

$L = \{(8/5)\}$

8.5. Gauss-Algorithmus

$\left| \begin{array}{l} ax + by - cz = u \,|\, (1) \\ ax + by + cz = v \,|\, (2) \\ ax - by - cz = w \,|\, (3) \end{array} \right|$

(1) und (2) addieren und x eliminieren

$\left| \begin{array}{l} ax + by - cz = u \,|\, (1) \\ ax + by + cz = v \,|\, (2) \end{array} \right|$

$\overline{dy + ez = w \,|\, (4)}$

(1) und (3) addieren und ebenfalls x eliminieren

$\left| \begin{array}{l} ax + by - cz = u \,|\, (1) \\ ax - by - cz = w \,|\, (3) \end{array} \right|$

$\overline{fy + gz = h \,|\, (5)}$

(4) und (5) addieren und y eliminieren

$\left| \begin{array}{l} dy + ez = w \,|\, (4) \\ fy + gz = h \,|\, (5) \end{array} \right|$

$\overline{iz = j \,|\, (6)}$

Aus (6) kann z bestimmt werden
Rückwärts auflösen:

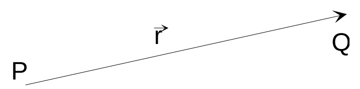
- z in (5) oder (4) einsetzen
- y bestimmen
- y und z in (1), (2) oder (3) einsetzen
- x bestimmen

9. Vektorgeometrie und – Algebra

9.1. Definition

Vektor: gerichtete Grösse
Skalar: Masszahl und Masseinheit

9.2. Ortsvektor



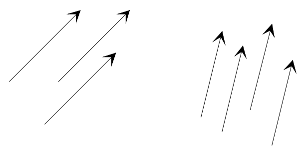
Der Ortsvektor $\vec{r}$ hat einen festgelegten **Anfangspunkt**, **Betrag** und eine **Richtung**.

9.2.1. Betrag eines Vektors

Der Betrag ist die Länge des Vektors

$\vec{r} = \overrightarrow{PQ}$ Betrag: $\overline{PQ} = \left|\vec{v}\right|$

9.3. Freier Vektor



Ein freier Vektor hat einen **Betrag** und eine **Richtung**.
Der Anfangspunkt kann frei gewählt werden

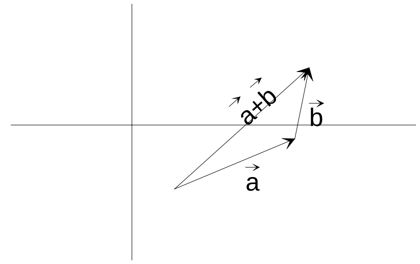
9.4. Nullvektor

Ein Vektor mit dem Betrag 0 ($\left|\vec{v}\right| = 0$).

Da er keine Länge hat ist er ein **Punkt** im Raum.
Ein freier Nullvektor kann also jeder Punkt des Raumes sein.

9.5. Ebenes Koordinatensystem

9.5.1. Summe (grafisch)



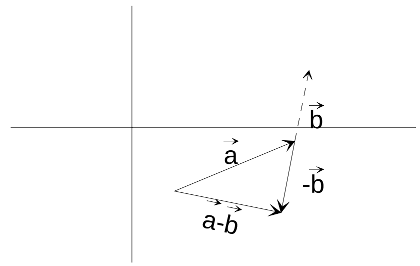
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}$$

9.5.2. Differenz

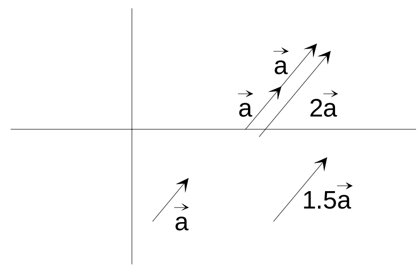


$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_b \\ -y_b \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{pmatrix}$$

(Addition des negativen Vektors)

9.5.3. Vielfaches

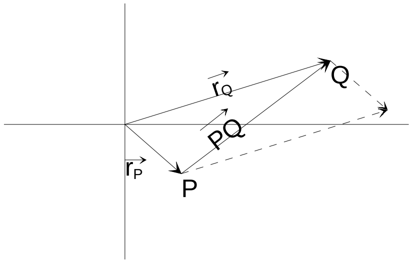


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$2\vec{a} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$r\vec{a} = r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}$$

9.5.4. Vektor aus Anfangs- und Endpunkt



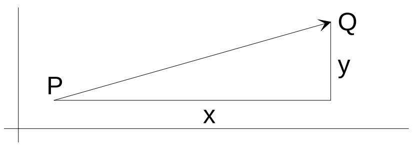
$P(x_P / y_p)$

$Q(x_Q / y_Q)$

$\overrightarrow{r_P} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{r_Q}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$$

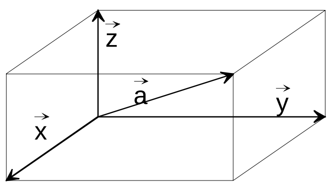
9.5.5. Berechnung des Abstandes zwischen zwei Punkten



$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

9.6. Vektoren im Raum

9.6.1. Berechnung der Beträge

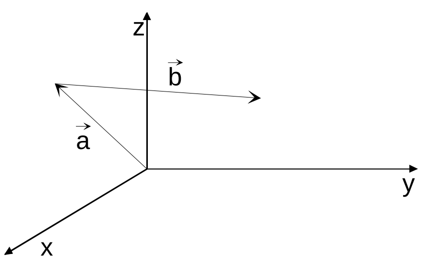


Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ hat den Betrag

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

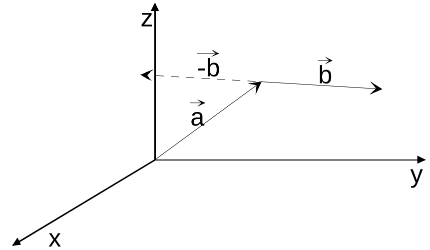
(räumlicher Pythagoras)

9.6.2. Summe



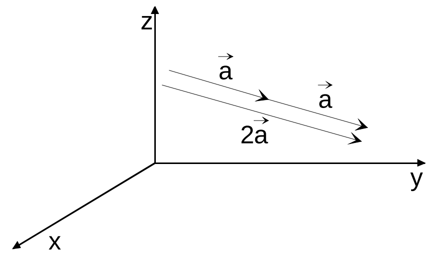
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix}$$

9.6.3. Differenz



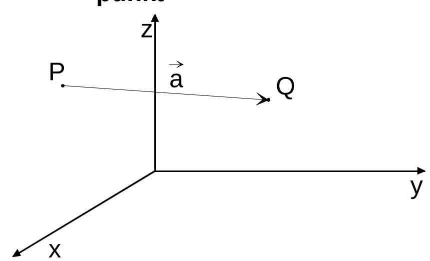
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix}$$

9.6.4. Vielfaches



$$k \cdot \vec{a} = k \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_a \\ k \cdot y_a \\ k \cdot z_a \end{pmatrix}$$

9.6.5. Vektor aus Anfangs- und Endpunkt



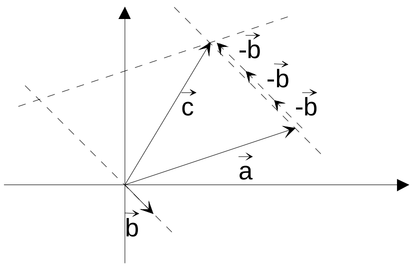
$$\overrightarrow{r_P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{r_Q} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$$

9.6.6. Abstandsformel

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

9.7. Zerlegung von Vektoren



$$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$$

Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

Komponentengleichung

$$\left| \begin{array}{l} x_c = m \cdot x_a + n \cdot x_b \\ y_c = m \cdot y_a + n \cdot y_b \end{array} \right|$$

Die Komponentengleichung ist ein **lineares Gleichungssystem ➔** m und n können berechnet werden.

9.8. Kollineare und komplanare Vektoren

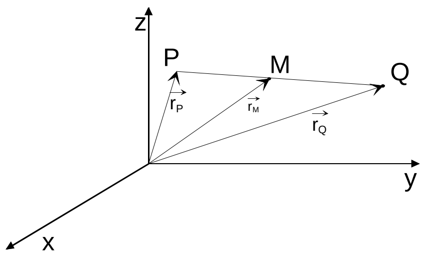
9.8.1. Kollineare Vektoren:

Vektoren, die parallel zu derselben Geraden sind.

9.8.2. Komplanare Vektoren:

Vektoren, die parallel zu derselben Ebene sind.

9.9. Mittelpunkt einer Strecke



$$\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{r_P} + \overrightarrow{PM}$$

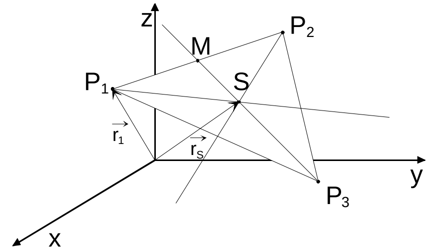
$$\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{r_P} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{r_P} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P}\right)$$

$$\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{r_P} - \frac{1}{2}\overrightarrow{r_P} + \frac{1}{2}\overrightarrow{r_Q}$$

$$=> \overrightarrow{r_M} = \frac{1}{2}\left(r_P + r_Q\right)$$

9.10. Schwerpunkt eines Dreiecks

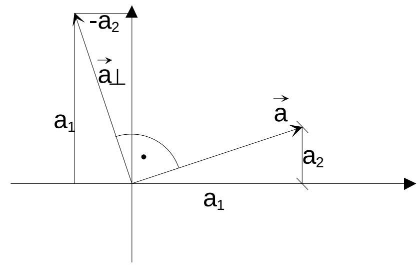


$$x_S = \frac{1}{3}\left(x_1 + x_2 + x_3\right)$$

$$y_S = \frac{1}{3}\left(y_1 + y_2 + y_3\right)$$

$$z_S = \frac{1}{3}\left(z_1 + z_2 + z_3\right)$$

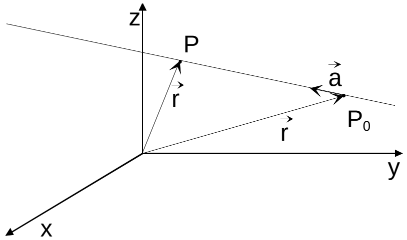
9.11. Normalvektor in der Grundebene



Für jeden Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ der Grundebene gilt $\vec{a}\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a1 \end{pmatrix}$

9.12. Gleichung der Geraden

9.12.1. Die Parametergleichung der Geraden



Parametergleichung der Geraden

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t \cdot \vec{a}$$

9.12.2. Die Vektorgleichung der Geraden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

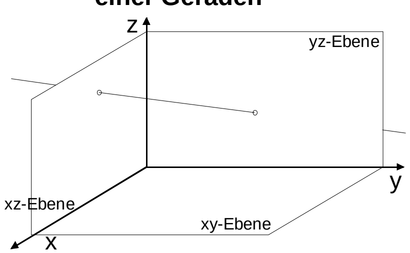
9.12.3. Die Komponentengleichung der Geraden

$$x = x_0 + t \cdot a_x$$

$$y = y_0 + t \cdot a_x$$

$$z = z_0 + t \cdot a_z$$

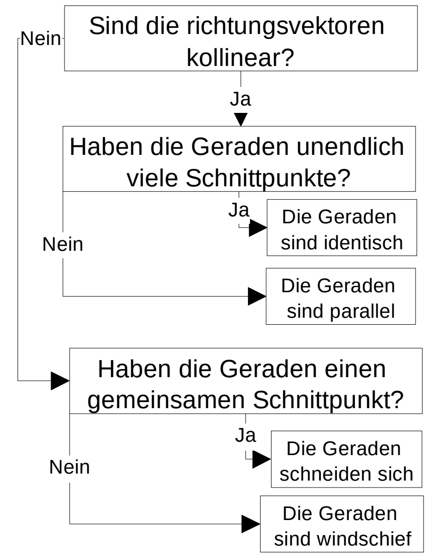
9.12.4. Bestimmen der Spurpunkte einer Geraden



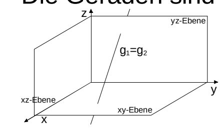
Spurpunkte sind jene Punte, bei denen die Geraden die Koordinatenebenen durchdringen. D.h. Schnittpunkte der Geraden mit der xy-, yz-, und/oder mit der xz-Ebene.

➔ Eine Komponente dieser Punkte ist immer 0!

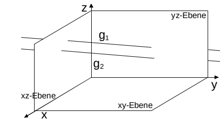
9.12.5. Gegenseitige Lagen von Geraden im Raum



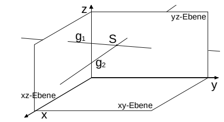
Die Geraden sind identisch.



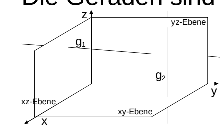
Die Geraden sind parallel.



Die Geraden schneiden sich.

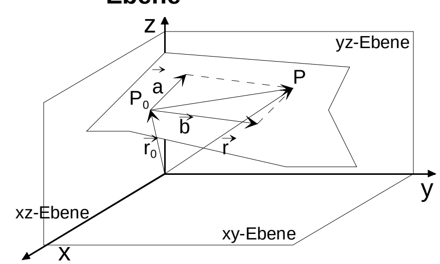


Die Geraden sind windschief.



9.13. Gleichung der Ebene

9.13.1. Die Parametergleichung der Ebene



Ein Punkt P_0 und 2 Richtungsvektoren bestimmen eine Ebene.

➔ **Parametergleichung**:

$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}}$$

Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

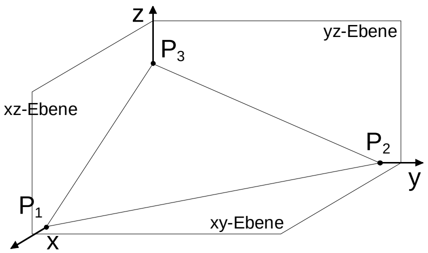
Komponentengleichung

$$x = x_0 + u \cdot a_x + v \cdot b_x$$

$$y = y_0 + u \cdot a_y + v \cdot b_y$$

$$z = z_0 + u \cdot a_z + v \cdot b_z$$

9.13.2. Berechnung der Achsenabschnitte



Für den **x-Achsenabschnitt** kann für y und z 0 eingesetzt werden:

$$x = x_0 + u \cdot a_x + v \cdot b_x = 0$$

Für den **y-Achsenabschnitt** kann für x und z 0 eingesetzt werden:

$$y = y_0 + u \cdot a_y + v \cdot b_y = 0$$

Für den **z-Achsenabschnitt** kann für x und y 0 eingesetzt werden:

$$z = z_0 + u \cdot a_z + v \cdot b_z = 0$$

9.13.3. Die Koordinatengleichung der Ebene

Durch Elimination von u und v aus der Komponentengleichung erhält man eine Gleichung in der Form:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

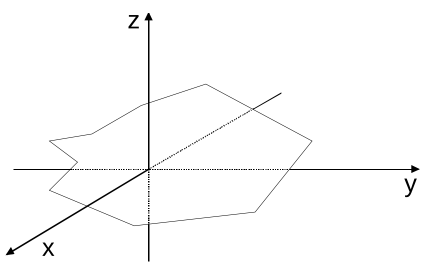
Dies ist die Koordinatengleichung der Ebene. Die Ebene ist die Menge der Punkte des Raumes, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen.

9.14. Spezielle Lagen von Ebenen

Ebenengleichung:

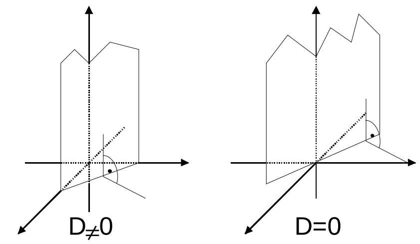
$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

9.14.1. Was bedeutet D=0



Bei D=0 geht die Ebene durch den Ursprung!! (0/0/0)

9.14.2. Was bedeutet C=0



Für den Achsenabschnitt z gilt x=0; y=0

➔ 0+0+0z+D=0 oder D=0

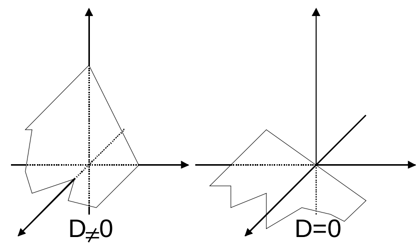
$D \neq 0$ ➔ unlösbar (falsche Aussage)

➔ Ebene parallel zur z-Achse

$D = 0$ ➔ Ebene geht durch z-Achse

Die Ebene steht normal auf der xy-Ebene und heisst deshalb **erstprojizierende Ebene**.

9.14.3. Was bedeutet A=0



Für den Achsenabschnitt x gilt y=0; z=0

➔ 0x+0+0+D=0 oder D=0

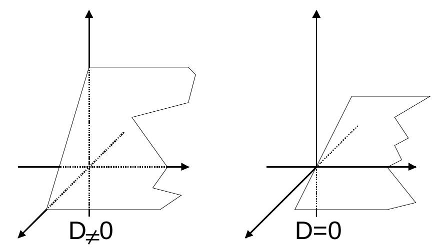
$D \neq 0$ ➔ unlösbar (falsche Aussage)

➔ Ebene parallel zur x-Achse

$D = 0$ ➔ Ebene geht durch x-Achse

Die Ebene steht normal auf der yz-Ebene und heisst deshalb **zweitprojizierende Ebene**.

9.14.4. Was bedeutet B=0



Für den Achsenabschnitt y gilt x=0; z=0

➔ 0+0y+0+D=0 oder D=0

$D \neq 0$ ➔ unlösbar (falsche Aussage

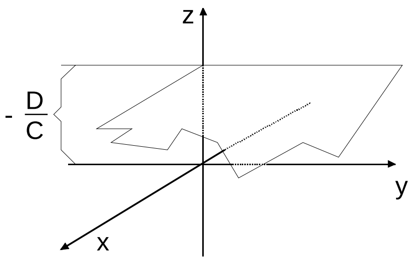
➔ Ebene parallel zur y-Achse

$D = 0$ ➔ Ebene geht durch y-Achse

Die Ebene steht normal auf der xz-Ebene und heisst deshalb **drittprojizierende Ebene**.

9.15. Die Hauptebenen

9.15.1. Die erste Hauptebene

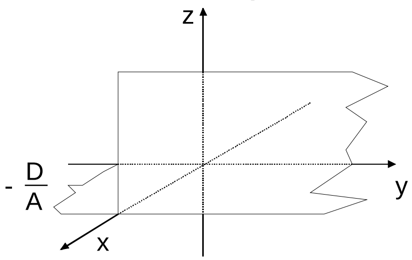


Es fehlen die Glieder Ax und By der Ebenengleichung:

$$Cz + D = 0 \text{ oder } z = -\frac{D}{C}$$

Die Ebene liegt **parallel** zur xy-Ebene!

9.15.2. Die zweite Hauptebene

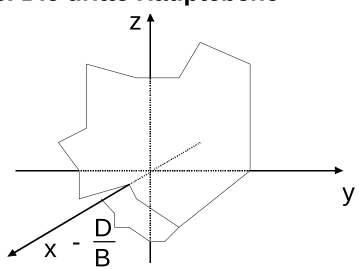


Es fehlen die Glieder By und Cz der Ebenengleichung:

$$Ax + D = 0 \text{ oder } x = -\frac{D}{A}$$

Die Ebene liegt **parallel** zur yz-Ebene!

9.15.3. Die dritte Hauptebene

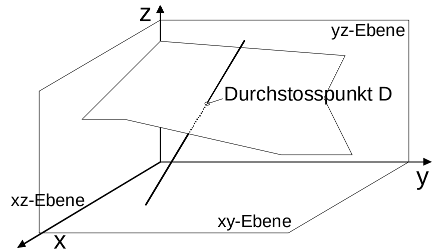


Es fehlen die Glieder Ax und Cz der Ebenengleichung:

$$By + D = 0 \text{ oder } y = -\frac{D}{B}$$

Die Ebene liegt **parallel** zur xz-Ebene

9.16. Schnitt von Geraden und Ebenen



Ebene

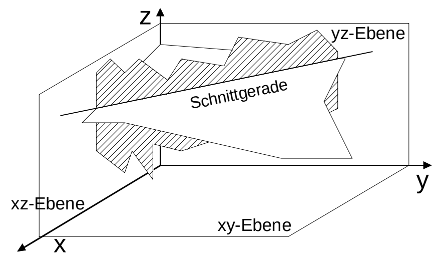
$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + u\vec{a} + v\vec{b}$$

Gerade

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_{0G}} + t\vec{c}$$

1. Gleichungen gleichsetzen
2. Auflösen nach u, v und t
3. u, v oder t in die Ursprungsgleichung einsetzen

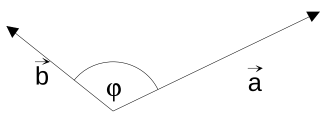
9.17. Schnittgeraden zweier Ebenen



Geg: 2 Koordinatengleichungen
Ges: Schnittgerade
Man braucht mindestens 2 Punkte auf der Schnittgeraden.
1. Einsetzen irgendeiner Zahl für eine Koordinate
2. Das entstehende Gleichungssystem kann aufgelöst werden
3. Prozedur für einen zweiten Punkt widerholen
4. Parametergleichung der Geraden berechnen

9.18. Das Skalarprodukt

Definition



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\varphi$$

Rechenregel:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} =$$

$$a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$$

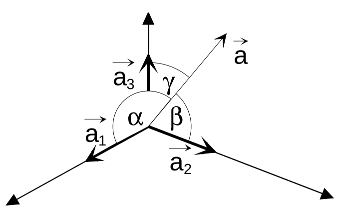
9.18.1. Berechnung des Winkels

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\varphi$$

$$==> \cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} =$$

$$\frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}\cdot\sqrt{b_x^{\,2}+b_y^{\,2}+b_z^{\,2}}}$$

9.18.2. Winkel zwischen Vektor und Koordinatenachse



$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e_1}}{a\cdot e_1} = \frac{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{a\cdot 1} = \frac{\overrightarrow{a_x}}{a}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e_2}}{a\cdot e_2} = \frac{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{a\cdot 1} = \frac{\overrightarrow{a_y}}{a}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e_3}}{a\cdot e_3} = \frac{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{a\cdot 1} = \frac{\overrightarrow{a_z}}{a}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ heissen Richtungskosinus von $\vec{a}$; sie sind voneinander abhängig:

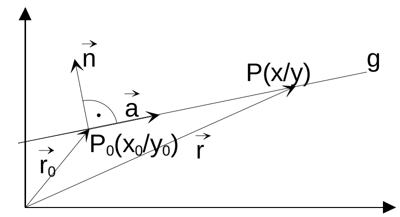
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = \frac{a_x^{\,2}}{a^2}+\frac{a_y^{\,2}}{a^2}+\frac{a_z^{\,2}}{a^2} =$$

$$\frac{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1}$$

9.19. Normalvektor auf Gerade und Ebene

9.19.1. Normalvektor auf einer Geraden



Wie bereits bekannt:

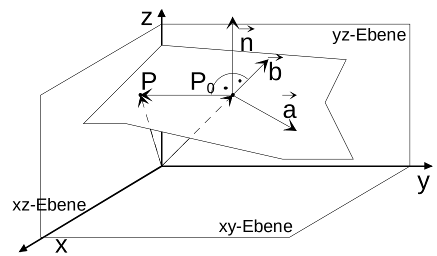
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$$

Aus der Koordinatengleichung können die Komponenten eines Normalenvektors direkt herausgelesen werden:

$$Ax + By + C = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

9.19.2. Normalvektor auf einer Ebene



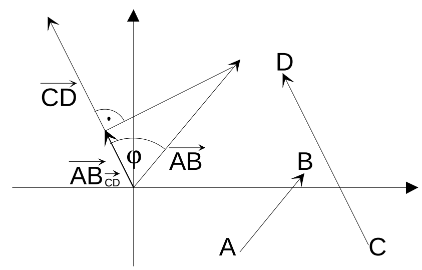
Normalvektor:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Der Normalvektor kann also aus der Koordinatengleichung bestimmt werden.

9.19.3. Projektion eines Vektors auf eine Gerade



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\cos\varphi = \overline{CD}\cdot\overline{AB}\cdot\cos\varphi$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overline{CD}\cdot\overline{AB_{\overline{CD}}}$$

$$\boxed{\overline{AB_{\overline{CD}}} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\overline{CD}}}$$ => Länge

$$\boxed{\overrightarrow{AB_{\overline{CD}}} = \frac{\overrightarrow{CD}}{\overline{\overline{CD}}}\cdot\overline{AB_{\overline{CD}}}}$$ => Koordinaten