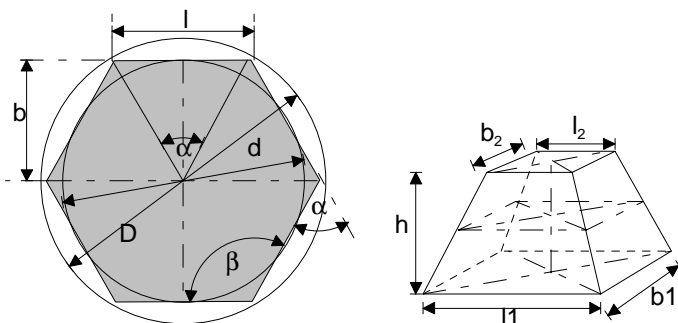


Geometrie



Formelsammlung

Berufsmaturitätsschule

Luzern

Rainer Meier
 Käserei
 6288 Schongau
<mailto:skybeam@skybeam.ch>

Klasse: 4
 1997 - 2001

© 2001 by Rainer Meier

2001-05-08

1. Inhaltsverzeichnis

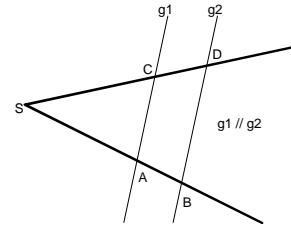
1. Inhaltsverzeichnis	2
2. Strahlensatz	4
2.1. 1. Strahlensatz.....	4
2.2. 2. Strahlensatz.....	4
2.3. 3. Strahlensatz.....	4
3. Flächen	5
3.1. Quadrat.....	5
3.2. Rechteck.....	5
3.3. Rhombus (Raute).....	5
3.4. Parallelogramm (Rhomboid).....	5
3.5. Dreieck.....	5
3.6. Trapez.....	6
3.7. Kreis.....	6
3.8. Kreisring.....	6
3.9. Kreisabschnitt.....	6
3.10. Kreisabschnitt.....	7
3.11. Ellipse.....	7
3.12. Vieleck.....	7
3.13. Dreieck.....	8
3.13.1. Mittelsenkrechte.....	8
3.13.2. Winkelhalbierende.....	8
3.13.3. Seitenhalbierende (Schwerlinie).....	8
4. Trigonometrie	9
4.1. Winkelmasse, Bogenmass.....	9
4.2. Dreiecksberechnungen.....	10
4.2.1. Sinussatz.....	10
4.2.2. Kosinussatz.....	10
4.2.3. Sehnensatz.....	10
4.2.4. Im rechtwinkligen Dreieck.....	10
4.3. Flächenformeln.....	11
4.4. Inkreisradius.....	11
5. Stereometrie	12
5.1. Würfel.....	12
5.2. Quader/Prisma.....	12
5.3. Pyramide.....	12
5.4. Pyramidenstumpf.....	13
5.5. Zylinder.....	13
5.6. Kegel.....	13
5.7. Kegelstumpf.....	14
5.8. Kugel.....	14
5.9. Kugelschicht.....	14
5.10. Kugelsegment/ Kugelabschnitt.....	14
5.11. Kugelsektor.....	15
5.12. Simpsonsche Formel.....	15
5.13. Guldinsche Formel.....	15

2001-05-08

- 5.14. Satz von Cavalieri15
- 5.15. Spitze Körper.....15
- 5.16. Schwerpunkte von Flächen.....16
 - 5.16.1. Dreieck.....17
 - 5.16.2. Rechtwinkliges Trapez.....17
 - 5.16.3. Kreisabschnitt.....17
 - 5.16.4. Rechteck und Parallelogramm.....17
 - 5.16.5. Halbkreis.....18
 - 5.16.6. Kreisabschnitt18
 - 5.16.7. Trapez.....18
 - 5.16.8. Viertelkreis18
 - 5.16.9. Kreisringfläche19
 - 5.16.10. Schwerpunkt der Kreislinie19

2. Strahlensatz

2.1. 1. Strahlensatz

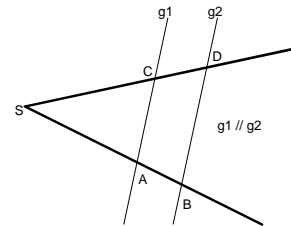


$$\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD}$$

$$\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{SC} : \overline{SD}$$

$$\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}$$

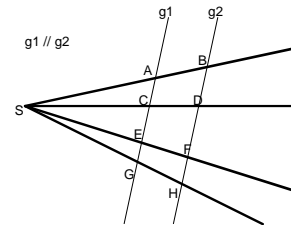
2.2. 2. Strahlensatz



$$\overline{SA} : \overline{AC} = \overline{SB} : \overline{BD}$$

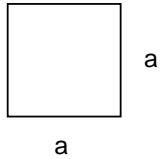
$$\overline{SC} : \overline{SD} = \overline{CA} : \overline{DB}$$

2.3. 3. Strahlensatz



$$\overline{AC} : \overline{CD} = \overline{BD} : \overline{DF}$$

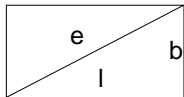
$$\overline{AE} : \overline{BF} = \overline{CE} : \overline{DF}$$

3. Flächen**3.1. Quadrat**

$$A = a^2$$

$$e = a \cdot \sqrt{2}$$

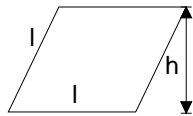
$$U = 4a$$

3.2. Rechteck

$$A = l \cdot b$$

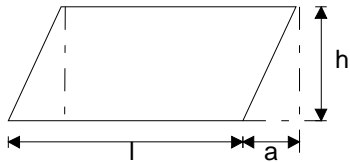
$$U = 2 \cdot (l + b)$$

$$e = \sqrt{l^2 + b^2}$$

3.3. Rhombus (Raute)

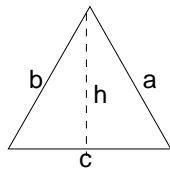
$$A = l \cdot h$$

$$U = 4 \cdot l$$

3.4. Parallelogramm (Rhomboid)

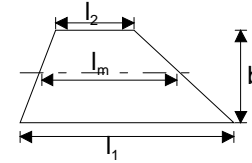
$$A = l \cdot b$$

$$U = \text{Summe aller Seiten}$$

3.5. Dreieck

$$A = \frac{c \cdot h}{2}$$

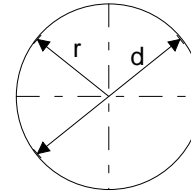
$$U = \text{Summe aller Seiten}$$

3.6. Trapez

$$A = l_m \cdot b$$

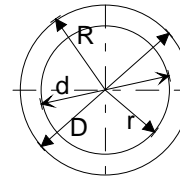
$$l_m = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$$U = \text{Summe aller Seiten}$$

3.7. Kreis

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \pi \cdot r^2$$

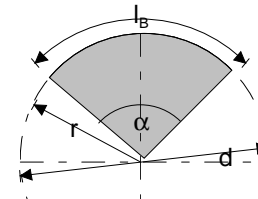
$$U = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$$

3.8. Kreisring

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

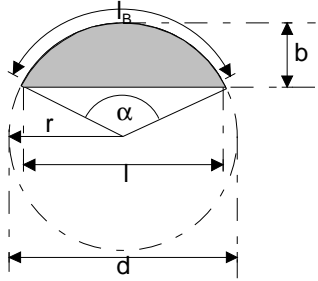
$$U = D \cdot \pi + d \cdot \pi$$

3.9. Kreisabschnitt

$$A = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \alpha}{4 \cdot 360}$$

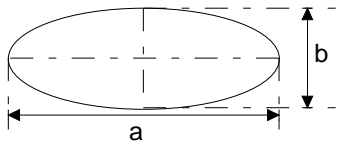
$$A = \frac{r \cdot l_B}{2}$$

$$l_B = \frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360}$$

3.10. Kreisabschnitt

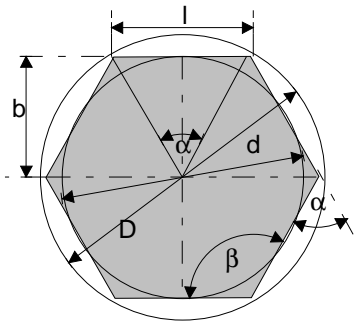
$$A = \frac{l_B \cdot r - l(r-b)}{2}$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{360} - \frac{l(r-b)}{2}$$

3.11. Ellipse

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{4}$$

$$U \approx \frac{a+b}{2} \pi$$

3.12. Vieleck

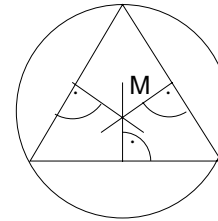
$$A = \frac{l \cdot b \cdot n}{2}$$

$$U = l \cdot n$$

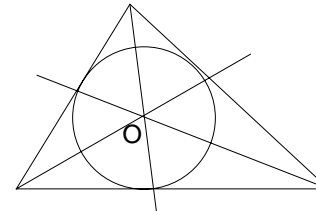
$$l = D \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{360}{n}$$

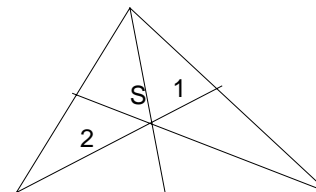
$$\beta = 180 - \alpha$$

3.13. Dreieck**3.13.1. Mittelsenkrechte**

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Umkreises

3.13.2. Winkelhalbierende

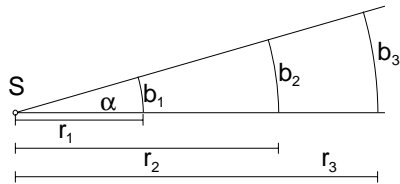
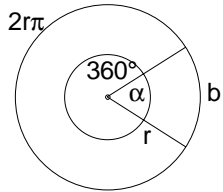
Die Winkelhalbierenden treffen sich im Schnittpunkt O, welcher das Zentrum des Inkreises ist.

3.13.3. Seitenhalbierende (Schwerlinie)

Die Schwerlinien (Eckpunkt zur Mitte der gegenüberliegenden Seiten) schneiden sich im Schwerpunkt S. Der Schwerpunkt S teilt die Schwerlinie im Verhältnis 2:1.

4. Trigonometrie

4.1. Winkelmasse, Bogenmass



$$\frac{U}{b} = \frac{2r \cdot \pi}{b} = \frac{360^\circ}{\alpha}$$

$$\frac{r \cdot \pi}{b} = \frac{180^\circ}{\alpha}$$

Grad \rightarrow Bogenmass:

$$\frac{b_1}{r_1} = \frac{b_2}{r_2} = \dots = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$$

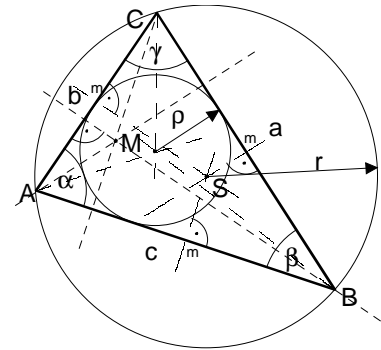
Bogenmass \rightarrow Grad:

$$\alpha = \frac{\text{Bogenmass}}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Bogenmass

[1]

4.2. Dreiecksberechnungen



4.2.1. Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

4.2.2. Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

4.2.3. Sehnensatz

$$a = 2 \cdot r \cdot \sin \alpha$$

$$b = 2 \cdot r \cdot \sin \beta$$

$$c = 2 \cdot r \cdot \sin \gamma$$

- m Mittelpunkt der Strecke
- M Schnittpunkt der Winkelhalbierenden
- S Schnittpunkt der Mittelsenkrechten
- r Radius des Umkreises
- ρ Radius des Inkreises

4.2.4. Im rechtwinkligen Dreieck Sinusfunktion

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Kosinusfunktion

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Tangensfunktion

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

4.3. Flächenformeln

$$A = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot U = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{SSS}$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$A = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha \quad \text{SWS}$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta$$

$$A = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \alpha}$$

$$A = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \beta} \quad \text{SWW}$$

$$A = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \cdot \sin \lambda}$$

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}$$

$$A = 2 \cdot r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

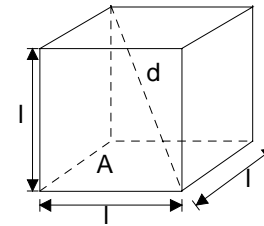
$$A = \rho \cdot s$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

4.4. Inkreisradius

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

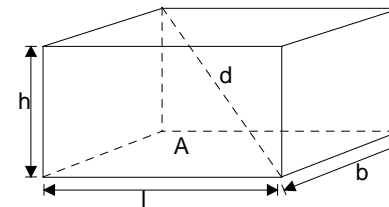
$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

5. Stereometrie**5.1. Würfel**

$$V = A \cdot l = l^3$$

$$O = 6 \cdot l^2$$

$$d = l \cdot \sqrt{3}$$

5.2. Quader/Prisma

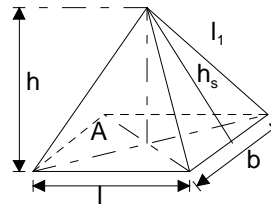
$$V = A \cdot h = l \cdot b \cdot h$$

$$O = 2(l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$$

$$d = \sqrt{l^2 + h^2 + b^2}$$

O Oberfläche

M Mantelfläche

5.3. Pyramide

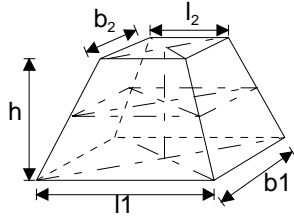
$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

$$O = M + A$$

$$h_s = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$$

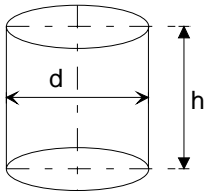
$$l_1 = \sqrt{h_s^2 + \frac{b^2}{4}}$$

5.4. Pyramidenstumpf



$$V = \frac{h}{3} \cdot (l_1 \cdot b_1 + l_2 \cdot b_2 + \sqrt{l_1 \cdot l_2 \cdot b_1 \cdot b_2})$$

5.5. Zylinder



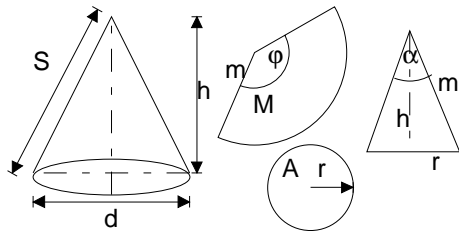
$$V = A \cdot h = r^2 \pi \cdot h$$

$$O = 2r^2 \pi + 2r \pi \cdot h = 2r \pi (r + h)$$

$$M = 2rh$$

$$G = 2\pi r^2$$

5.6. Kegel



$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

$$O = \pi \cdot r(r + m)$$

$$\frac{r}{h} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

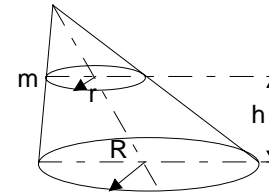
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi}{360} = 360 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}}$$

$$\frac{\varphi}{360} = \frac{r}{m}$$

$$M = \pi \cdot r \cdot m$$

$$m = \sqrt{r^2 + h^2}$$

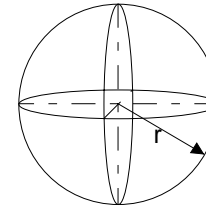
5.7. Kegelsegment



$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h(r^2 + R^2 + R \cdot r)$$

$$M = \pi \cdot m(r + R)$$

5.8. Kugel

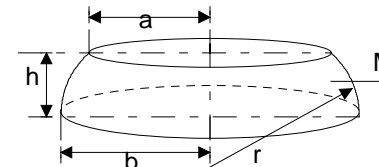


$$V = \frac{4 \cdot \pi}{3} r^3$$

$$V = \frac{d^3 \cdot \pi}{6}$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

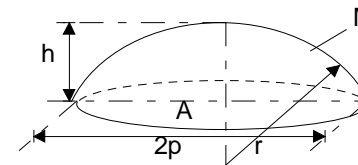
5.9. Kugelschicht



$$V = \frac{\pi}{6} \cdot h(3 \cdot a^2 + 3 \cdot b^2 + h^2)$$

$$V = \frac{h^2 \cdot \pi}{6} (3 \cdot D - 2 \cdot h)$$

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

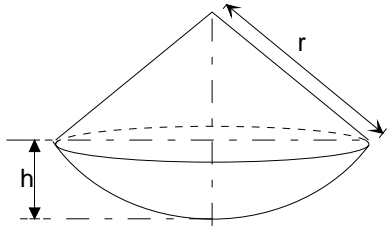
5.10. Kugelsegment/
Kugelabschnitt

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2(3 \cdot r - h) = \frac{\pi}{6} \cdot h(3p^2 + h^2)$$

$$O = M + \pi \cdot p^2$$

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

5.11. Kugelsektor



$$V = \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

5.12. Simpsonsche Formel

$$\text{Volumen} = \frac{\text{Körperhöhe}}{6} \cdot (A_{\text{Grund}} + A_{\text{Deck}} + 4 \cdot A_{\text{Mittel}})$$

$$V = \frac{h}{6} (A_G + A_D + 4 \cdot A_M)$$

A_G Grundfläche
 A_D Deckfläche
 A_M Mittelfläche (in halber Körperhöhe)

ACHTUNG: $A_M \neq \frac{A_D + A_G}{2}$

5.13. Guldinsche Formel

Das Volumen eines Rotationskörpers ist das Produkt aus der erzeugenden Fläche A und dem Weg ihres Schwerpunktes S während einer Umdrehung um die Rotationsachse

$$V = A \cdot s_S = A \cdot d_S \cdot \pi$$

$$O = U \cdot s_S = 2 \cdot x_0 \cdot \pi \cdot U$$

$$x_0 = \frac{\sum l_n \cdot x_n}{\sum l_n}$$

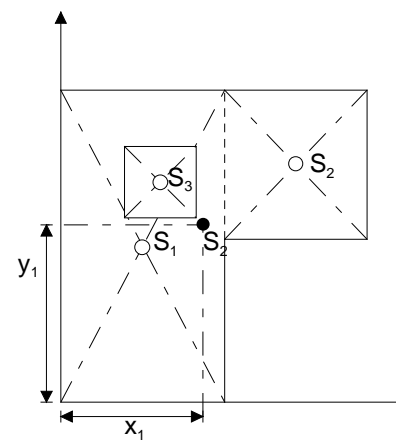
5.14. Satz von Cavalieri

Haben zwei Körper die gleichen Grundflächen, die gleiche Höhe und in gleicher Höhe flächengleiche Parallelquerschnitte zur Grundfläche, so sind ihre Volumina gleich.

5.15. Spitze Körper

$$V = \frac{A_G \cdot h}{3}$$

5.16. Schwerpunkte von Flächen



	cm ²	cm	cm	cm ³	cm ³
Fläche Nr.	A_n	x_n	y_n	$A_n \cdot x_n$	$A_n \cdot y_n$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
Total					

$$x_0 = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

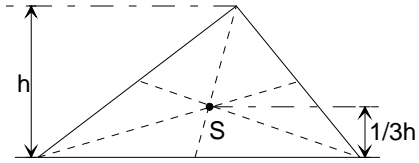
$$y_0 = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \dots + A_n \cdot y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

bzw.

$$x_0 = \frac{\sum (A_n \cdot x_n)}{\sum A_n}$$

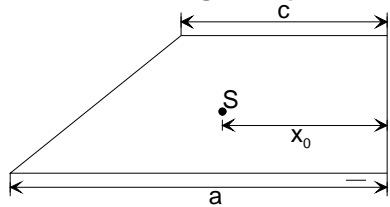
$$y_0 = \frac{\sum (A_n \cdot y_n)}{\sum A_n}$$

5.16.1. Dreieck



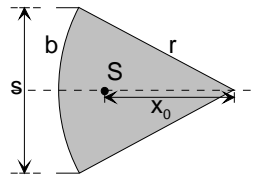
S liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.
Der Schnittpunkt S teilt die Schwerlinien im Verhältnis 1:2.

5.16.2. Rechtwinkliges Trapez



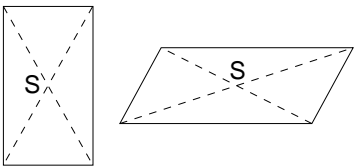
$$x_0 = \frac{a^2 + a \cdot c + c^2}{3(a+c)}$$

5.16.3. Kreisabschnitt



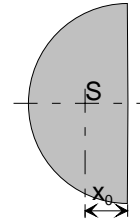
$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot s}{b}$$

5.16.4. Rechteck und Parallelogramm



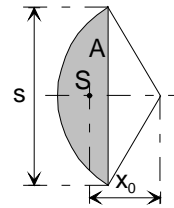
S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen

5.16.5. Halbkreis



$$x_0 = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} = 0.424 \cdot r$$

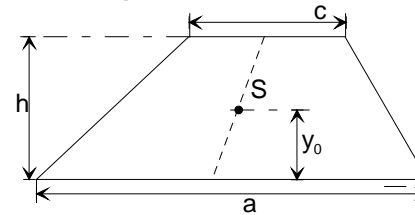
5.16.6. Kreisabschnitt



$$x_0 = \frac{s^3}{12 \cdot A}$$

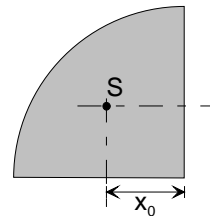
A Siehe Planimetrie

5.16.7. Trapez

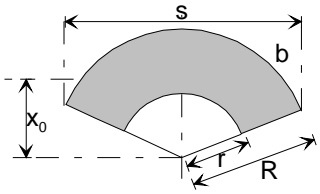


$$y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2 \cdot c}{a + c}$$

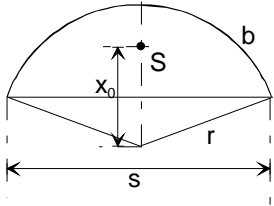
5.16.8. Viertelkreis



$$x_0 = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} = 0.424 \cdot r$$

5.16.9. Kreisringfläche

$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{s}{b}$$

5.16.10. Schwerpunkt der Kreislinie

$$x_0 = \frac{r \cdot s}{b}$$